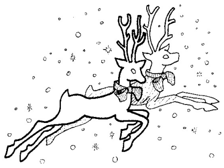


MATHÉMATIQUES

Examen de Décembre

Classe 11

Vendredi 19 décembre 2025

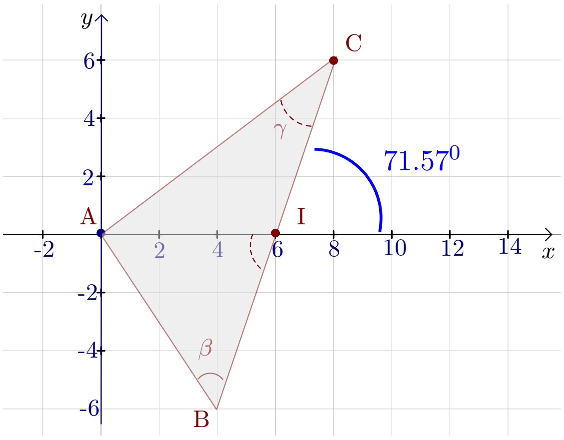
RÉPONSES

Total: / 83 points

Problème 1 [1 2 2 2 2 2 2 -> /13 pts]

Le triangle ABC passe par les points A:$(0;0)$, B:$(4;-6)$ et C: $(8;6)$

Le segment BC coupe l'axe des abscisse au point I comme le montre la figure ci-dessous.



1) Déterminer la *pente* de la droite passant par B et C.

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{12}{4} = \boxed{3}$$

2) En déduire l'*équation cartésienne* de la droite BC.

$y = px + h$ on sait que $p = 3$ et on cherche h

$y = 3x + h$ passe par B:$(4, -6)$ donc $-6 = 3 \times 4 + h \Rightarrow h = -18$

donc l'équation cartésienne est : $\boxed{y = 3x - 18}$

3) Le point I est l'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

Utiliser votre équation pour montrer que I a comme coordonnées $(6, 0)$.

Sur l'axe des abscisses, on a $y = 0$

donc $0 = 3x - 18 \quad \Rightarrow 3x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

4) Déterminer (par l'une des méthodes vues en classe) l'angle d'inclinaison de la droite BC.

pente = tan(angle d'inclinaison) $\Rightarrow$angle d'inclinaison =arctan(3)=$\boxed{71.57^0}$

5) L'ange d'inclinaison sur la figure.

L'angle $\widehat{\mathrm{AIB}}$ a la <u>même valeur</u>, car ces angles sont opposés par le sommet I

6) Pour monter que $\gamma \cong 34,7^0$, on peut utiliser le théorème du sinus.

$\frac{\sin(\gamma)}{\mathrm{AI}} = \frac{\sin(180-71.57)}{\mathrm{AC}}$ avec AI =6 et AC$=\sqrt{8^2+6^2}=10$

donc $\sin(\gamma) = \frac{6}{10}\sin(108.43) = 0.569 \Rightarrow \gamma = 34.68^0$

7) Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{CAB}}$.

$$\widehat{\mathrm{CAB}} = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}}{10\sqrt{156}}\right)\hat{} = \arccos\left(\frac{32-36}{10\sqrt{156}}\right)\hat{} = \arccos\left(\frac{-1}{5\sqrt{39}}\right) = \boxed{91.83^0}$$

Bonus (+2) Calculer l'aire du triangle ABC en utilisant la formule seconde formule

pour l'aire, page 37.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+6^2}\sqrt{8^2+6^2}\sin(180-71.57-34,7^0) = \frac{1}{2}\sqrt{52}\times 10\sin(73,75^0) = \boxed{34.6}$$

Problème 2

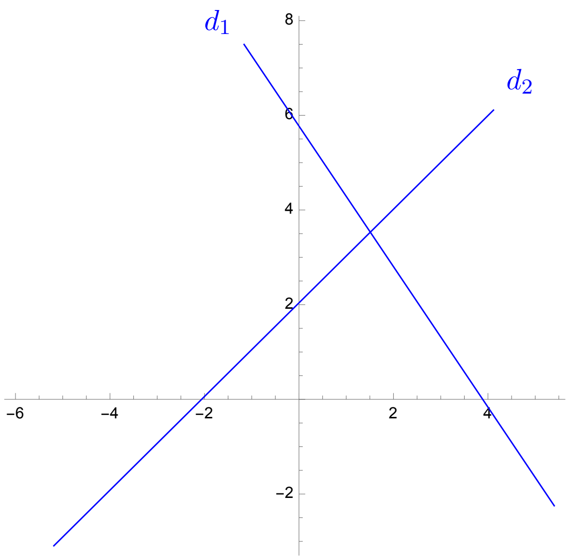
[2 2 2 2 2 3 -> /13 pts]

On donne les d_1 et d_2 par leur équation cartésienne respectives $y=6-\frac{3}{2}x$ et $y=x+2$

1)

droite	pente	ordonnée à l'origine
d_1	$-\frac{3}{2}$	6
d_2	1	2

2) Les deux droites sont représentées sur la figure ci-dessous



3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I entre les deux droites.

$$6-\frac{3}{2}x=x+2 \Rightarrow \left(1+\frac{3}{2}\right)x=6-2 \Rightarrow \boxed{x_I=\frac{8}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_I=\frac{18}{5}}$$

4)

droite	point d'entrée	vecteur directeur
d_1	$(0;2)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
d_2	$(0;6)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) Pour chacune des deux droites, proposer une équation vectorielle.

d_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

d_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) On donne les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{b}$ et $\vec{f}$ sont *vecteur directeur* de d_1

$\vec{d}$ est *vecteur directeur* de d_1

Problème 3 [2 2 4 2 3 -> /13 pts]

Considérons les droites suivantes:

$\mathcal{D}_1$ d'équation vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{D}_2$ d'équation vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Un point A de $\mathcal{D}_1$ est A: $(1; 3; -2)$ (en choisissant $\lambda_1 = 0$)

Un point B de $\mathcal{D}_2$ est A: $(-4; 4; -14)$ (en choisissant $\lambda_2 = 0$)

2) Un vecteur directeur $\vec{v_1}$ pour $\mathcal{D}_1$ et un vecteur directeur $\vec{v_2}$ pour $\mathcal{D}_2$ peuvent être

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent, car

i) L'équation de $\mathcal{D}_1$ est équivalente au système de 3 équations, $\begin{cases} x = 1 - \lambda_1 \\ y = 3 + 2\lambda_1 \\ z = -2 - 3\lambda_1 \end{cases}$

ii) Comme les 3 équations contienne λ_1, on a

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-3} \quad (=\lambda_2)$$

iii) Par ailleurs, pour $\mathcal{D}_2$: $\begin{cases} x = -4 + 2\lambda_2 \\ y = 4 + 5\lambda_2 \\ z = -14 + 3\lambda_2 \end{cases}$

iv) En replaçant x, y, z de iii dans la double égalité de l'étape ii

on obtient : $\frac{(-4+2\lambda_2)-1}{-1} = \frac{(4+5\lambda_2)-3}{2} = \frac{(-14+3\lambda_2)+2}{-3}$

d'est à dire $\frac{2\lambda_2 - 5}{-1} = \frac{5\lambda_2 + 1}{2} = \frac{3\lambda_2 - 12}{-3}$

La première égalité est satisfaite si $\lambda_2 = 1$

la seconde égalité est satisfaite si $\lambda_2 = 1$

Donc il existe une valeur de λ_2 ($\lambda_2 = 1$) qui vérifie les deux conditions

$\Rightarrow$ Les deux droites se rencontre au point de $\mathcal{D}_2$ correspondant à $\lambda_2 = 1$.

4) Posons $\mathrm{I} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Par notre résultat précèdent, en posant $\lambda_2 = 1$ dans l'équation de $\mathcal{D}_2$

on obtient bien I: $(-2; 9; -11)$

5) Trouver l'angle entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Cet angle (θ) est égal à celui entre les *vecteurs directeurs* $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_1$ et s'obtient par le

produit scalaire : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 + 10 - 9 = -1$

et $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \sqrt{1+4+9}\ \sqrt{4+25+9}\ \cos(\theta) \quad \Rightarrow \theta = \text{acrcos}\left(\frac{-7}{\sqrt{14 \times 38}}\right) = \boxed{92.48^0}$

L'angle aigu est : $\boxed{180^0 - 92.48^0 = 87.5^0}$

Problème 4 [1 1 2 1 3 2 -> /10 pts]

On donne les droites d_1 et d_1 dans l'espace, par leurs équations vectorielles

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Les coordonnées d'un point P appartenant à d_1 sont : $\boxed{P : (1; -5; 4)}$

2) Les coordonnées d'un point Q appartenant à d_2 sont : $\boxed{Q : (4; 1; 2)}$

3) Une équation vectorielle de la droite d_3, *parallèle* à d_1 et passant par Q

est $\quad d_3 : \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \lambda \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) Une équation vectorielle de la droite d_4, *parallèle* à d_2 et passant par P

est $\quad d_4 : \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \lambda \vec{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) Une équation vectorielle de la droite d_5, passant par P et par Q

est $\quad d_4 : \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \lambda \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

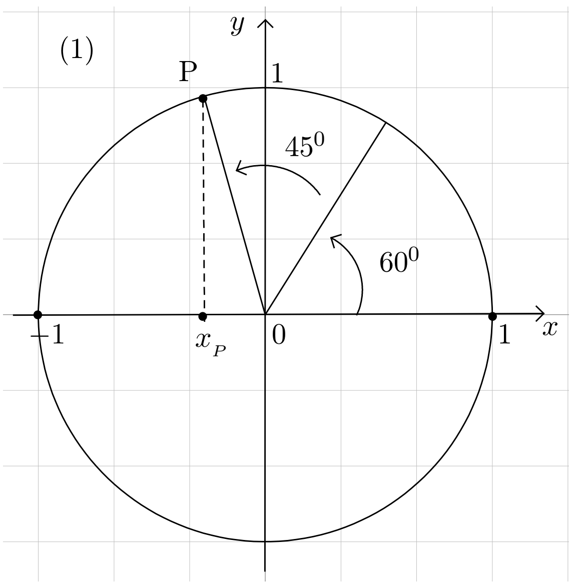
6) La norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ est : $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \boxed{7}$

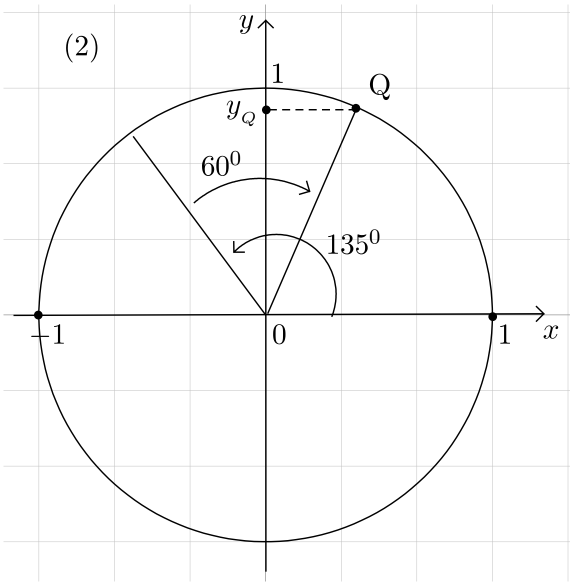
Problème 5

[4 4 -> /8 pts]

1) La valeur exacte de x_P est $\cos(60+45) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})} \cong$-0.259

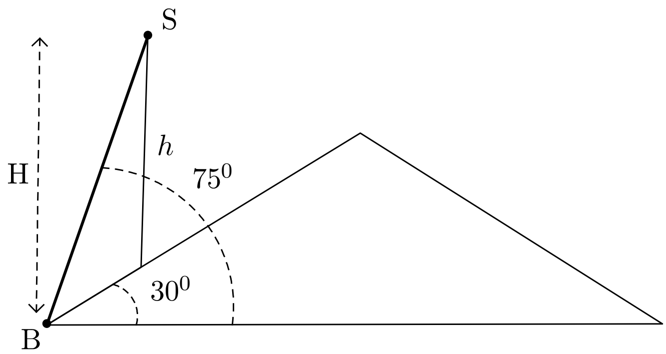
2) La valeur exacte de y_Q est $\sin(135-60) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} \cong$-0.966





Problème 6

[3 3 4 -> /10 pts]



1) $\sin(75) = \sin(30)\cos(45) + \cos(30)\sin(45) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$

2) $h = l\sin(75) = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \boxed{1+\sqrt{3}\,m}$ $(\cong 2.73m)$

3) $\frac{h}{\sin(45)} = \frac{\text{BS}}{\sin(120)} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{4\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $(\cong 2.31m)$

Problème 7 [4 4 2 -> /10 pts]

Considérons :

- L'angle α du *second* quadrant, tel que $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$
- L'angle β du *troisièmee* quadrant, tel que $\cos(\beta) = \frac{-3}{5}$

1) $\cos(\alpha) = -\sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \boxed{-\frac{12}{13}}$ et du $\sin(\beta) = -\sqrt{1-\cos^2(\beta)} = \boxed{-\frac{4}{5}}$

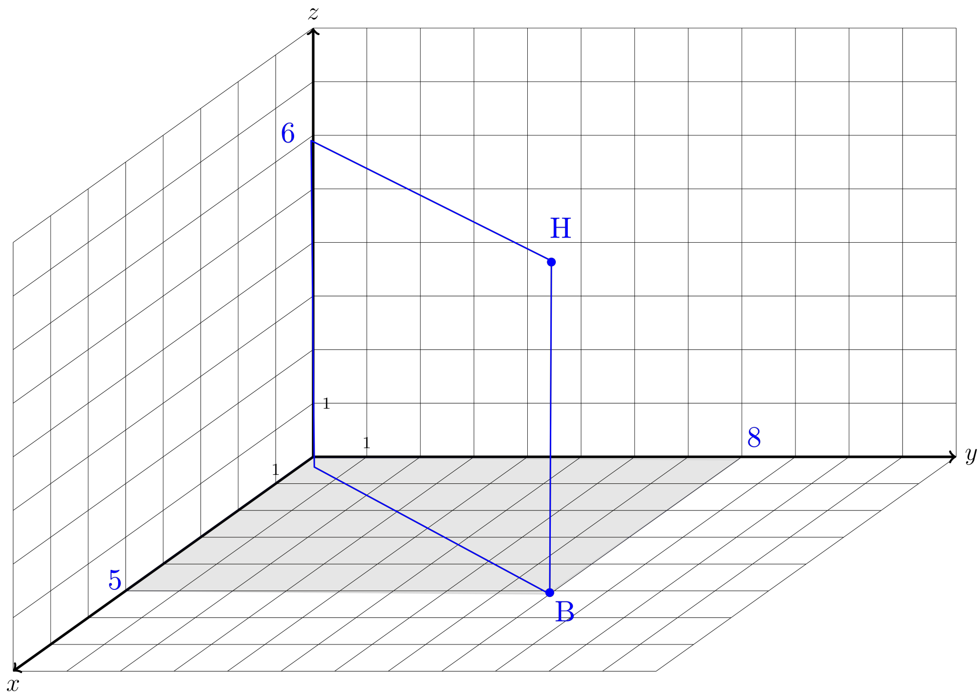
2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) - \left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{36+20}{13\times 5} = \boxed{\frac{56}{65}}$$

3) $\mathrm{Tan}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \boxed{-\frac{5}{12}}$

Problème 8 [1 2 1 1 1 -> /6 pts]

1) 2) Représenter le point B :$(5,8,0)$ et H :$(5,8,6)$ sur le dessin.



3) $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

4) La *norme* du vecteur $\overrightarrow{OH}$. est $\|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{5^2+8^2+6^2} = \boxed{\sqrt{125}}$

5) Imaginons une sphère S, centrée à l'origine, de rayon 11 unités.

Le point H se trouve à l'extérieur, car sa distance au centre du cercle est $\|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{125}$ ce qui est plus grand que le rayon de la sphère ($r = 11 = \sqrt{121} < \sqrt{125}$).