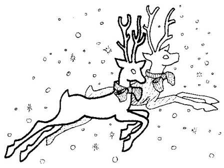


MATHÉMATIQUES
Examen de Décembre

Classe 11

Mardi 17 décembre 2024

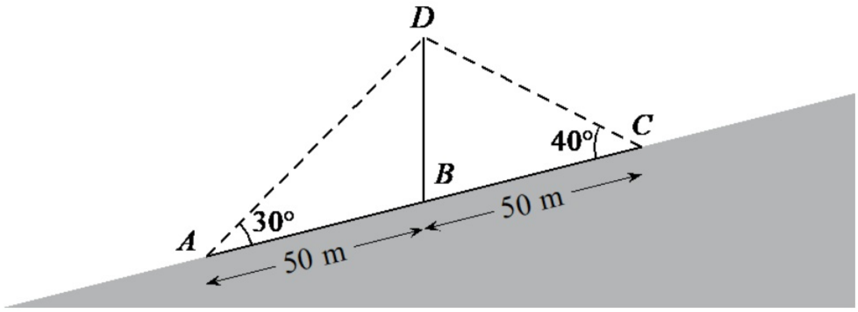
Réponses

Total: / 54 points

Problème 1

[3 3 -> /6 pts]

Un mât, situé au flanc d'une colline, est retenu par deux câbles comme sur la figure.



Les points d'ancrage des câbles (A et C) sont à 50 mètres de part et d'autre du pied du mât (point B). Le câble aval AD forme un angle de 30° avec la colline tandis que le câble amont CD forme un angle de 40° avec la colline.

a) L'angle $\angle$ADC. vaut $180^0 - 30^0 - 40^0 = 110^0$

Les longueurs des câbles AD et CD s'obtiennent facilement par le théorème du sinus:

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC}\frac{\sin(\widehat{\mathrm{ACD}})}{\sin(\widehat{\mathrm{ADC}})} = 100\frac{\sin(\hat{40})}{\sin(\widehat{110})} = \boxed{68.4m()}$$

$$\mathrm{CD} = \mathrm{AC}\frac{\sin(\widehat{\mathrm{ACD}})}{\sin(\widehat{\mathrm{ADC}})} = 100\frac{\sin(\hat{30})}{\sin(\widehat{110})} = \boxed{53.2m}$$

b) La *hauteur* du mât BD peut se calculer à partir du triangle ABD ou du triangle BCD, au moyen the *théorème du cosinus*.

Par exemple : $h^2 = 50^2 + 68.4^2 - 2 \cdot 50 \cdot 68.4 \cdot \cos(30) = 7178.56 - 5923.61 \Rightarrow h = 35.4m$

ou bien : $h^2 = 50^2 + 53.2^2 - 2 \cdot 50 \cdot 53..2 \cdot \cos(40) = 5330.24 - 4075.36 \Rightarrow h = 35.4m$

Problème 2 [3 4 5 -> /12 pts]

Résoudre les équations trigonométriques

1) $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi \quad \text{ou } x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{5\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$

2) $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou } \frac{1}{2}x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\Rightarrow \boxed{S = \{\pi + k4\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{8\pi}{5} + k4\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$

3) $\cos^2(x) - 2\sin(x) + 2 = 0$

$\Rightarrow \sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12$

$\cos(x) = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1 \text{ ou } -3 \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}}$

Problème 3 [-> /18 pts]

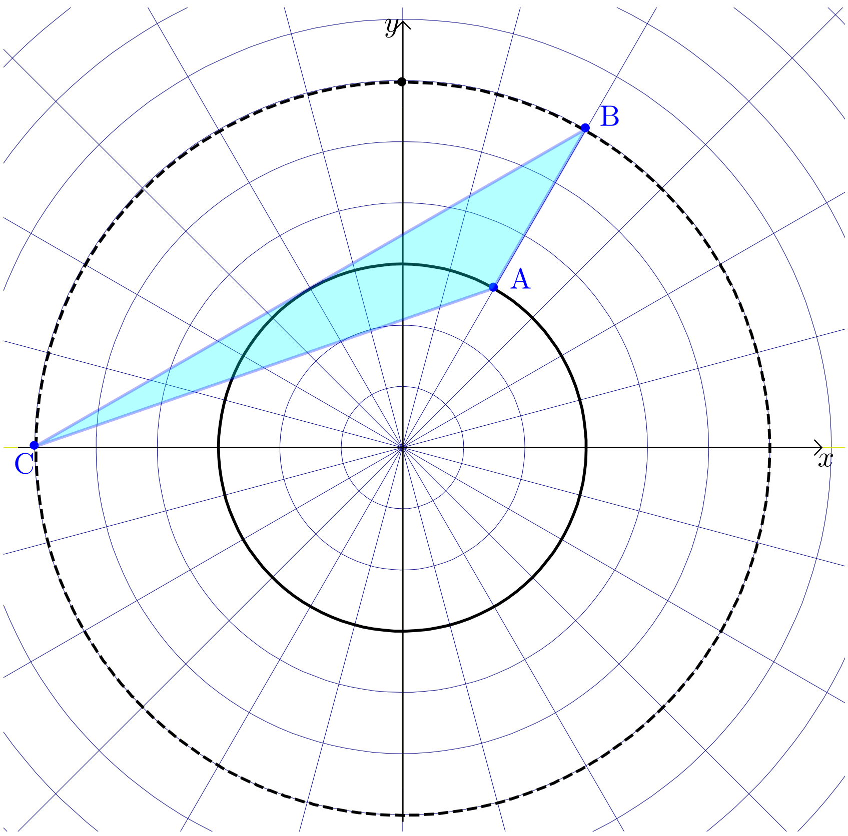
Sur la figure ci-dessous, le cercle noir en continu est le *cerce trigonométrique,* et le cercle noir en pointillé représente le cercle centré à l'origine de rayon 2.

Le point A est sur le cercle trigonométrique, et l'angle que forme le rayon OA par rapport à l'axe des abscisse vaut $\frac{\pi}{3}$ rad.

Le point B est sur le cercle pointillé, et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ est simplement

le double du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Le point C a comme coordonnées $(-2, 0)$



1) Les *coordonnées* des points sont A:$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, B:$(1; \sqrt{3})$ et C: $(-2, 0)$

2) Le triangle ABC est tracé sur la figure.

3) Les *longueurs* (expressions *exactes*) des trois côtés du triangle ABC sont

$\boxed{\mathrm{AB} = 1}$ (différence entre les rayons des deux cercles)

$\boxed{\mathrm{BC} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$

$$\boxed{AC = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+3}{4}} = \sqrt{7}}$$

4) L'*angle* $\alpha = \widehat{BAC}$ se trouve par le théorème du cosinus:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\,AB\cos(\widehat{BAC}) \Rightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 - 1^2}{-2(\sqrt{7})} = \frac{12-8}{-2\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{BAC} \cong 139.1^0}$$

5) Les deux *autres angles* β et γ du triangle se trouvent par le théorème du sinus:

$$\frac{\sin(\beta)}{AC} = \frac{\sin(139.1)}{BC} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\sin(139.1)\right) = \boxed{30^0} \quad \text{et } \gamma = 180 - \alpha - \beta = \boxed{10.9^0}$$

6) La *longueur de l'arc* BC vaut $l = r\theta$ avec $r = 2$ et $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ donc $\boxed{l = \frac{4\pi}{3}u}$

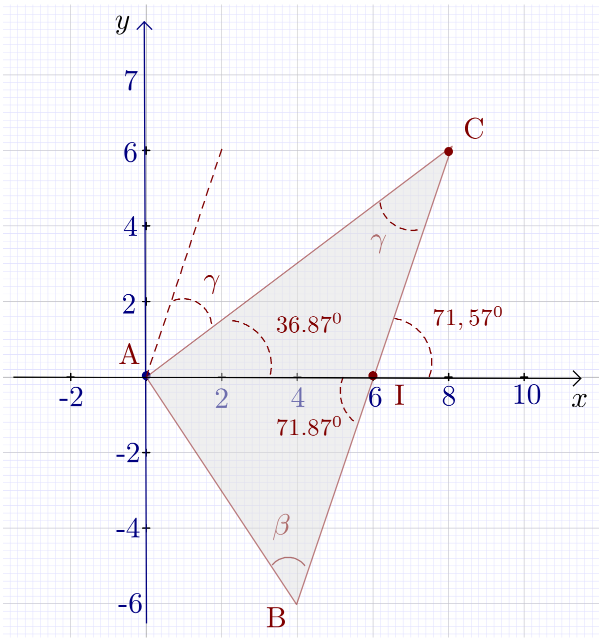
7) L'*aire* du triangle ABC vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\theta$ avec $r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}4\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}u^2}$

Problème 4 [3 3 3 2 -> /11 pts]

Ce problème recourt aux angles d'inclinaison des droites.

Le triangle ABC passe par les points A(0,0), B(4,-6) et C(8,6)

De plus le segment BC coupe l'axe des abscisse au point I:(6,0)



1) Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{\text{AIB}}$.

Pour cela on a recours à la pente de la droite IC qui vaut $\arctan(\frac{6}{2}) \cong 71.57$

L'angle $\widehat{\text{AIB}}$ a la même valeur (angles *alternes-internes*)

2) Monter que $\gamma \cong 34,7^0$

La construction ajoutée en pointillé sur la figure montre que l'angle γ est égal à la *différence* des deux angles d'inclinaison, c'est-à-dire :

$$\gamma \cong 71.57^0 - 36.87^0 = \boxed{34,7}$$

3) Monter que l'angle $\widehat{\text{CAB}}$ mesure $93,18^0$

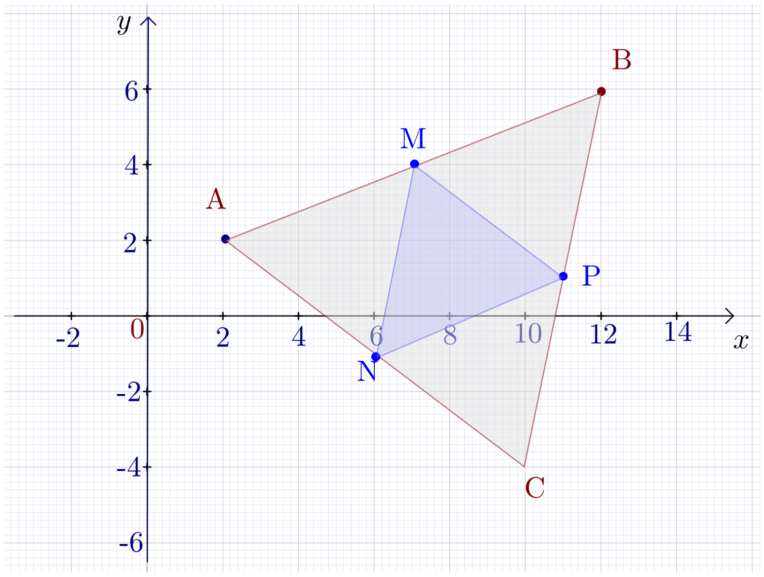
$\widehat{\text{CAB}} = \widehat{\text{CAI}} + \widehat{\text{BAI}}$ et $\tan(\widehat{\text{BAI}}) = \frac{6}{4}$ donc $\widehat{\text{CAB}} = 36.87 + \arctan(1.5) = 93.18^0$

4) L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{AC}\sin(\widehat{\text{CAB}}) = \frac{1}{2}\sqrt{36+16} \times \sqrt{64+36} \times \sin(93.18^0)$

$$= 5\sqrt{52} \times \sin(93.18^0) = \boxed{36\text{u}^2}$$

Problème 5 [2 2 3 -> /7 pts]

Considérons le triangle de sommets A(2 ; 2), B:(12 ; 6) et C:(10 ; -4)



1) Les coordoonées $\left(\frac{2+12}{2}, \frac{2+6}{2}\right)=(7,4)$ sont les *moyennes* des coordonnées des points A et B. (Une moyenne de deux nombres se trouvant exactement entre eux) $\Rightarrow$ milieu de AB

2) Soit N le milieu du côté AC et P le milieu de BC

$\boxed{N{:}\left(\frac{2+10}{2}, \frac{2-4}{2}\right)=(6;-1)}$ et de $\boxed{P{:}\left(\frac{12+10}{2}, \frac{6-4}{2}\right)=(11;1)}$

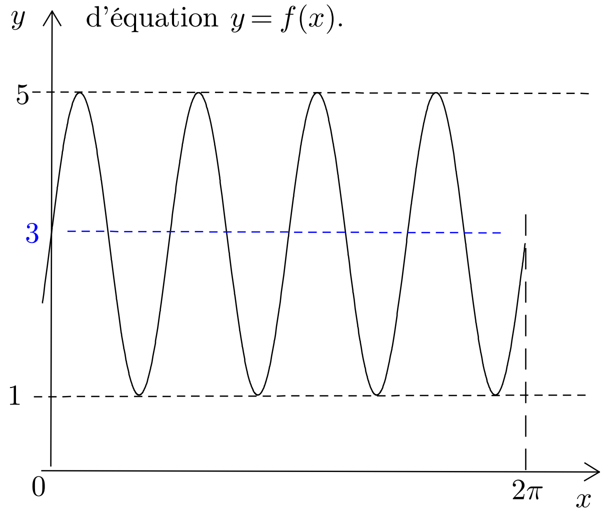
Les points M, N et P sont ajouté sur le dessin.

3) L'aire du triangle MNP est $\boxed{\text{4 fois}}$ inférieure à l'aire du triangle ABl.

En effet les deux triangles sont *semblables*, mais MNP est deux fois plus petit.

Problème 6 [1 1 1 1 -> /4 pts]

La courbe ci-dessous représente une partie (entre 0 et 2π) de la courbe d'équation $y = f(x)$.



Il s'agit de la fonction $\boxed{f(x) = 2\sin(2x) + 3}$

Problème 7 [9 5 -> /14 pts]

a) ◦ L'équation de la courbe ci-dessous est $\boxed{y = 2\sin(x)}$

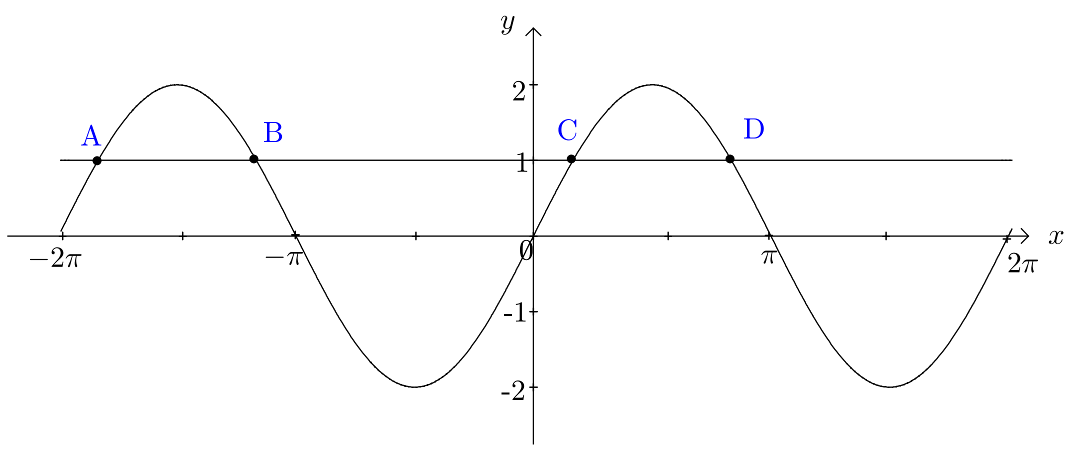
◦ L'équation de la droite (horizontale de hauteur 1) est $\boxed{y = 1}$

◦ L'équation permettant de trouver les valeurs de x qui sont abscisses des intersections de la droite et de la courbe est donc $\boxed{2\sin(x) = 1}$

◦ Résolution: $\sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

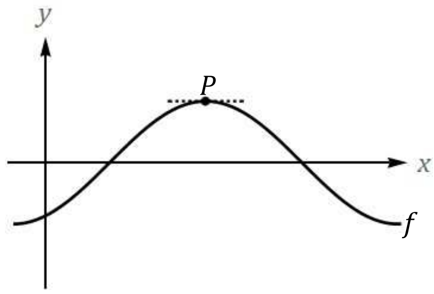
◦ Les coordonnées des 4 points d'intersection représentés ci-dessous sont

A:$\left(-\frac{11\pi}{6}; 1\right)$ B:$\left(-\frac{7\pi}{6}; 1\right)$ C:$\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$ D:$\left(\frac{5\pi}{6}; 1\right)$



b) Le graphe de la fonction $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ est donné ci-contre.

Calculer la valeur exacte des coordonnées du sommet P du graphe de f.



Il s'agit du premier maximum, donc en ce point $y = 2$ et $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

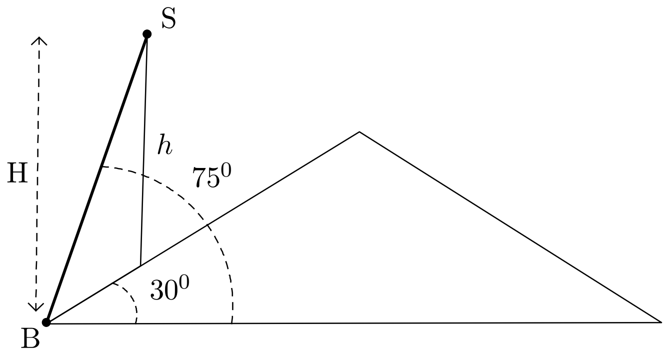
Autrement dit $\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$

Problème 8

[3 3 4 -> /8 pts]

Une personne a installé sur le toit 3 de sa maison un panneau solaire.

Le toit donne un angle de 30° avec l'horizontale, et le panneau un angle de 75° avec l'horizontale



1) $\sin(75) = \sin(30)\cos(45) + \cos(30)\sin(45) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$

2) $h = l\sin(75) = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \boxed{1 + \sqrt{3}\,m}$ $\quad (\cong 2.73m)$

3) $\frac{h}{\sin(45)} = \frac{\mathrm{BS}}{\sin(120)} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{4\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $(\cong 2.31m)$