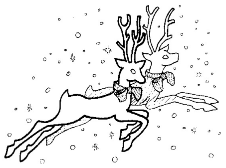


Mardi 20 décembre 2022

MATHÉMATIQUES

Examen de Décembre

Classe 11

⋆⋆⋆ RÉPONSES ⋆⋆⋆

Total: 43 points

Problème 1

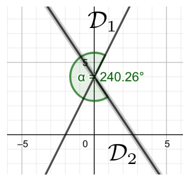
[3 2 2 -> /7 pts]

Considérons trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{R}^2$, données par leur équations

$$\mathcal{D}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D}_2 : \frac{x-2}{2} + \frac{y-1}{3} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_3 : 8x + 15y - 30 = 0$$

1) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) L'*angle* entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}2$ est $\theta = \arccos\left(\frac{1.2 - 2.3}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right) \cong 119.74^0$.



3) P:$(3, h) \in \mathcal{D}_1$, donc $3 = -1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 4 \quad \Rightarrow y = 2 + 2\lambda = 10$ $\boxed{h = 10}$

Problème 2

[3 2 -> /5 pts]

Considérons les trois droites suivantes, donnée par leur équations vectorielles.

$\mathcal{D}_1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x = 1 - \lambda$ et $y = 2 + 2\lambda \Rightarrow y = 2 + 2(1 - x) \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

$\mathcal{D}_2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

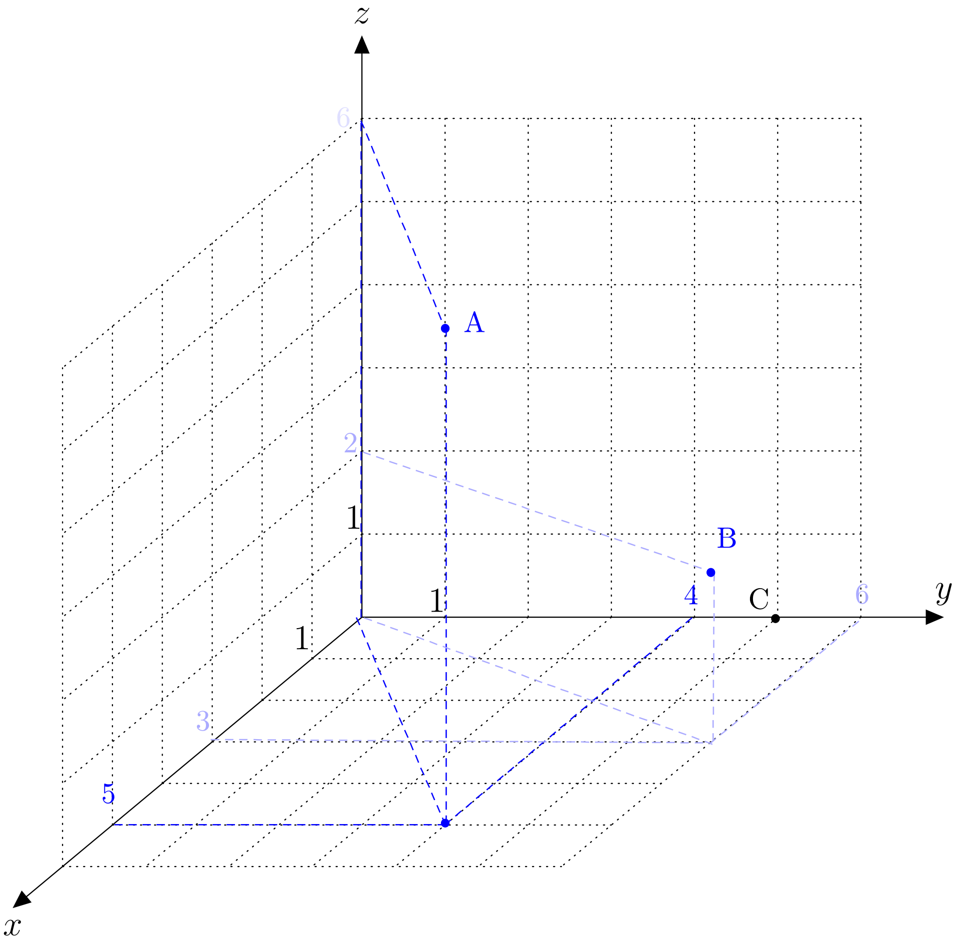
$\mathcal{D}_3$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

1) Les deux *parallèles* sont $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ car $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vecteurs directeurs colinéaires)

2) La distance entre les deux droites parallèles $\mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3) = \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, P)$ avec P:$(-1, 2) \in \mathcal{D}_3$

donc $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3) = \frac{|2 \times (-1) + 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Problème 3 [1 2 3 3 1 2 2 -> /14 pts]



On donne les 3 points de l'espace suivants : $A(5,4,6)$, $B(3,6,2)$ et $C(x_c, y_c, z_c)$

1) $C\colon(0,5,0)$.

2) La figure ci-dessus montre les points A et B.

3) Une équation *vectorielle* du plan Π_{ABC} est : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

4) Une équation *cartésienne* du plan Π_{ABC} est obtenue à partir du système

$$\begin{cases} x = 5 - 2\lambda_1 - 5\lambda_2 \\ y = 4 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = 6 - 4\lambda_1 - 6\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 - 4\lambda_2 \\ 2y + z = 14 - 4\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow (x+y) - (2y+z) = 9 - 14 \quad \Rightarrow \boxed{x - y - z + 5 = 0}$$

5) Un vecteur $\vec{n}$ *normal* à Π_{ABC} est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6) $\vec{n}$ est *perpendiculaire* à $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$. La raison est que $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est dans le plan Π_{ABC}

7) Soit Π le plan d'équation cartésienne $x - y + cz + 1 = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Les plans Π et Π_{ABC} sont *orthogonaux* $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 + 1 - c = 0$ donc $\boxed{c = 2}$

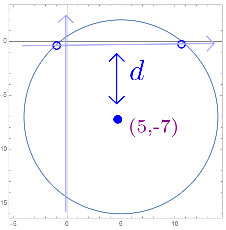
Problème 4

[3 1 1 -> /5 pts]

Considérons le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 14y - 7 = 0$

1) Centre de $\boxed{\mathcal{C}:(5,-7)}$ Le rayon r de $\mathcal{C}$ est tel que $5^2 + (-7)^2 - r^2 = -7 \quad \Rightarrow \boxed{r = 9}$

2) La distance de $\mathcal{C}:(5,-7)$ à l'axe des abscisses (d'équation y=0) est $\boxed{d = 7}$

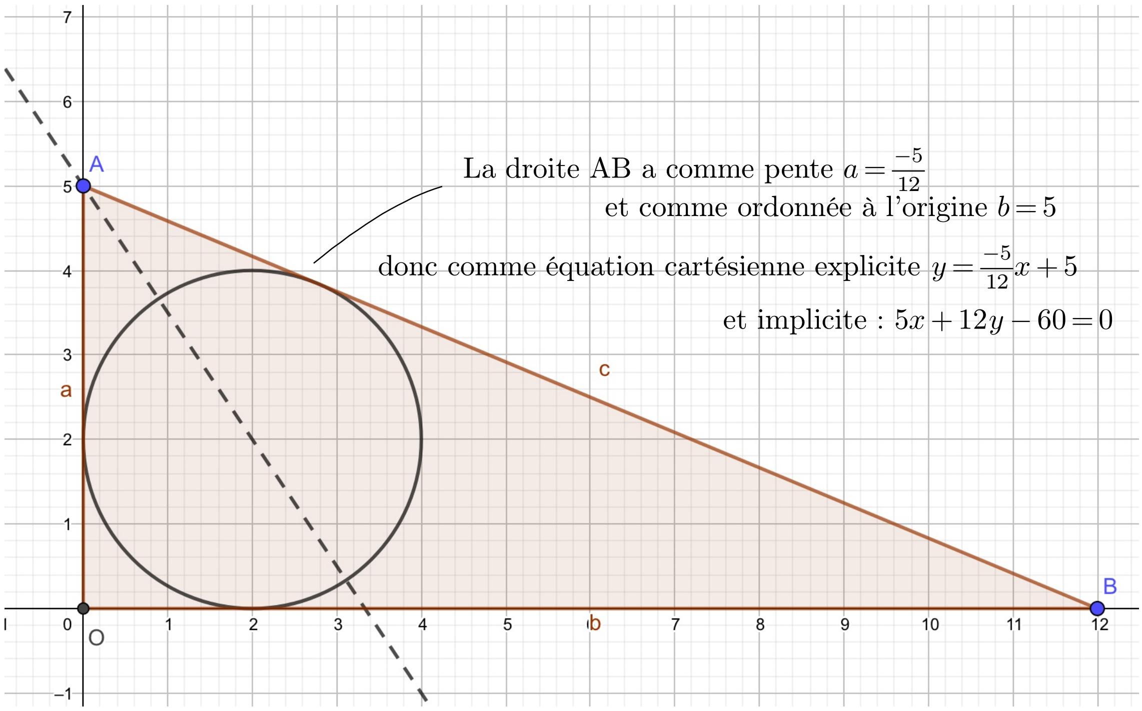


3) Comme $r > d$, le cercle $\mathcal{C}$ $\boxed{\text{coupe l'axe des abscisses en } \textit{deux} \text{ points.}}$

Problème 5

[1 4 4 2 1 -> /12 pts]

Considérons les points A (0,5) et B(12,0) comme ci-dessous.



1) La distance de A à B est $d = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

2) Les bissectrices de OA et AB comme équations $\frac{5x + 12y - 60}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \pm \frac{x}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Rightarrow \frac{5x + 12y - 60}{13} \pm \frac{x}{1}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 60 \pm 13x$

On voit que le bissectrice hachurée (qui est intérieure au triangle) a ici une pente *négative*.

C'est le cas ici en prenant le signe (-) car cela donne: $5x + 12y - 60 = -13x \Rightarrow 12y = -18x + 60$

donc $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 5}$ ce qui correspond bien à l'équation qu'il fallait trouver.

3) Les coordonnées du centre du cercle inscrit s'obtiennent en considérant l'intersection de deux bissectrices : Par exemple la bissectrice par A dont on vient de déterminer l'équation, et la bissectrice par O qui a évidemment comme équation $y = x$.

Donc $y = -\frac{3}{2}x + 5$ et $y = x$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{3}{2}x + 5$ $\Rightarrow x + \frac{3}{2}x = +5$ $\Rightarrow$ $x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}} = 2$

$y = x \Rightarrow \boxed{C\colon (2, 2)}$

4) L'équation du cercle est donc : $\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4}$

5) L'aire du cercle $= \pi r^2 = 4\pi$ et l'aire du triangle $= \frac{12 \times 5}{2} = 30$ $\frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15} \cong 40.18\% \Rightarrow \boxed{non}$