MATHS 11

Examen de Juin

Jeudi 20 Juin 2024

Durée : 3 heures

Réponses

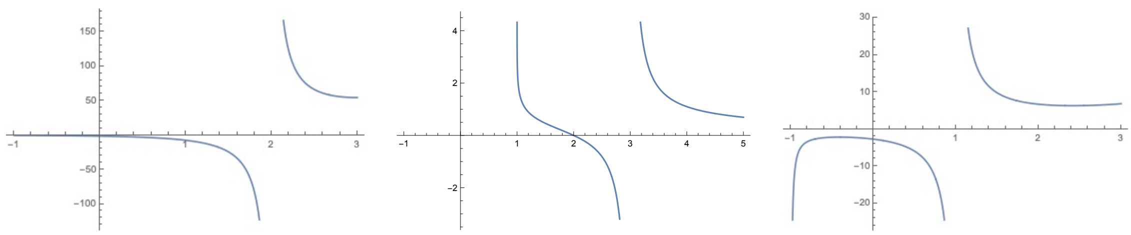
6 Questions. Total : $\boxed{\quad /73}$

Question 1 **[3 points]**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

1) Le *domaine* de f est $\mathcal{D}_f =]1, \infty[\setminus \{2\}$ [2]

2) La figures qui représente la courbe d'équation $y = f(x)$ est la seconde [1]



Question 2 **[26 points]**

Considérons la fonction $g(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{2(x^2 - 1)}$

1) Le *domaine* de g est $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$ [2]

2) Les *intersections* de la courbe de g avec les axes sont $\boxed{(0; \frac{1}{2}), (-\frac{1}{4}; 0), (1; 0)}$ [2]

3) La courbe de cette fonction admet une *asymptote verticale* en $x = -1$

Avec $x = 1$ (qui est aussi hors de $\mathcal{D}_g$) on obtient la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ »

ce qui nous oblige à considérer plus soigneusement la limite $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{4\left(x - \frac{1}{4}\right)}{2(x+1)} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$$ [4]

<u>Conclusion</u>: L'équation de l'A.V est $\boxed{x = -1}$, les coordonnées du trou sont $\boxed{\left(1; \frac{3}{4}\right)}$

4) La courbe admet aussi une *asymptote horizontale*, car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 2$

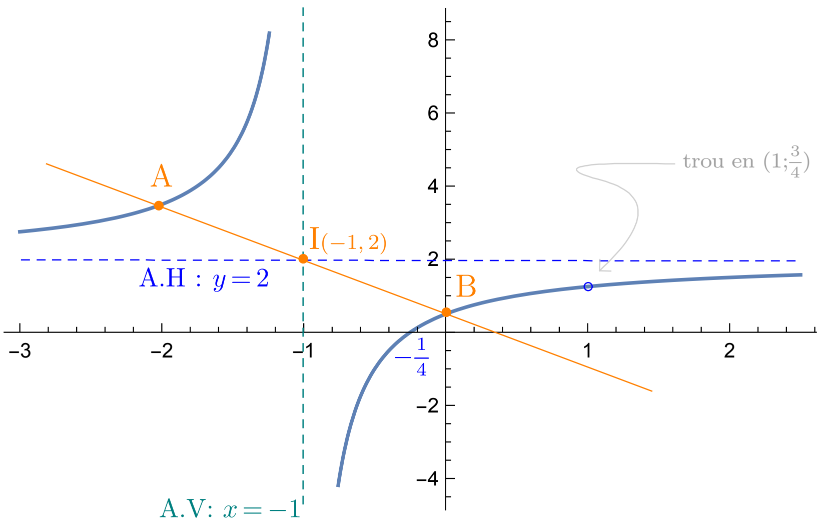
L'équation de l'asympotote horizontale est donc $\boxed{y = 2}$ [3]

5)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		1		∞
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{1}{4}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$+$	$^{+\infty}\Vert_{-\infty}$	$-$	0	$+$	trou en $\left(1, \frac{3}{4}\right)$	$+$	2

Le tableau de signe, indique que la courbe s'approche de l'asymptote verticale de telle sorte que $\boxed{\lim_{x\to -1^-} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -1^+} g(x) = \infty}$. [4]

6) [3]



7) A : point sur la courbe de g, d'abscisse $x_A = -2$ donc A:$\left(-2, \frac{7}{2}\right)$

B : point sur la courbe de g, d'abscisse $x_B = 0$. donc B:$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

La *pente* de la droite AB est $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{0-(-2)} = \boxed{\frac{-3}{4}}$ [3]

8) L'intersection des asymptotes est I:$(-1, 2)$.

On peut montrer de différentes façons que la droite AB passe par I.

Par exemple : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

9) On définit la fonction $h(x) = \log_3(g(x))$.

Le *domaine* de $h(x)$ est caractérisé par la condition $g(x) > 0$ [2]

Il suffit donc de regarder le tableau de signe de l'étape 5 pour conclure

$\boxed{\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{4}, \infty[}$

Question 3 (matu 2021) **[13 points]**

γ: $x^2+y^2-4x=2y+20 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=25$

a) donc centre C: $(2;1)$ et rayon $r=5$.

b) les coordonnées de A$(4;-10)$ ne verifient pas l'équation de γ:

$(4-2)^2+(-10-1)^2=125 \neq 25$ (la distance AC est donc $d \cong 11.2 > 5 \Rightarrow A$ est à l'extérieur)

c) La droite t_1 : $24x-7y-166=0$ est une *tangente* au cercle γ en A parce-que

- $d(\mathrm{C},T_1)=\frac{|24\times 2-7\times 1-166|}{\sqrt{24^2+(-7)^2}}=\frac{|-115|}{\sqrt{625}}=\frac{125}{25}=r$

- elle passe par le point A (puis-que $24\times 4-7\times(-10)-166=0$)

d) On donne T_2, l'autre tangente à γ passant par le point A.

Son équation est

$$T_2\colon \begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-10+4\lambda \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathrm{R}.$$

Pour trouver les coordonnées de son point de contact B avec le cercle γ,

on remplace x et y dans l'équation du cercle γ.

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-1)^2=25 \quad &\Rightarrow (4-3\lambda-2)^2+(-10+4\lambda-1)^2=25\\ &\Rightarrow (2-3\lambda)^2+(4\lambda-11)^2=25\\ &\Rightarrow 9\lambda^2-12\lambda+4+16\lambda^2-88\lambda+121=25\\ &\Rightarrow 25\lambda^2-100\lambda+100=0\\ &\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \quad \Rightarrow \lambda=2 \quad \text{(unique intersection, en B)}\end{aligned}$$

on obtient ainsi les coordonnées de B. $\boxed{\mathrm{B}:(-2,-2)}$

e) On demande l'équation de la droite $\mathcal{D}$ de pente $\frac{4}{3}$ telle que γ soit le cercle *inscrit* dans le triangle formé par les droites T_1, T_2 et $\mathcal{D}$.

Autrement dit il faut juste trouver l'équation d'une tangente au cercle dont la pente est $\frac{4}{3}$, c'est à dire d'équation $y=-\frac{4}{3}x+h$ où h est à trouver.

Comme $d(\mathrm{C},D)=r$, on a : $\frac{\left|\frac{4}{3}\times 2-1\times 1+h\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-1)^2}}=5 \Rightarrow \frac{\left|\frac{5}{3}+h\right|}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=5 \Rightarrow \frac{3}{5}\left|\frac{5}{3}+h\right|=5$

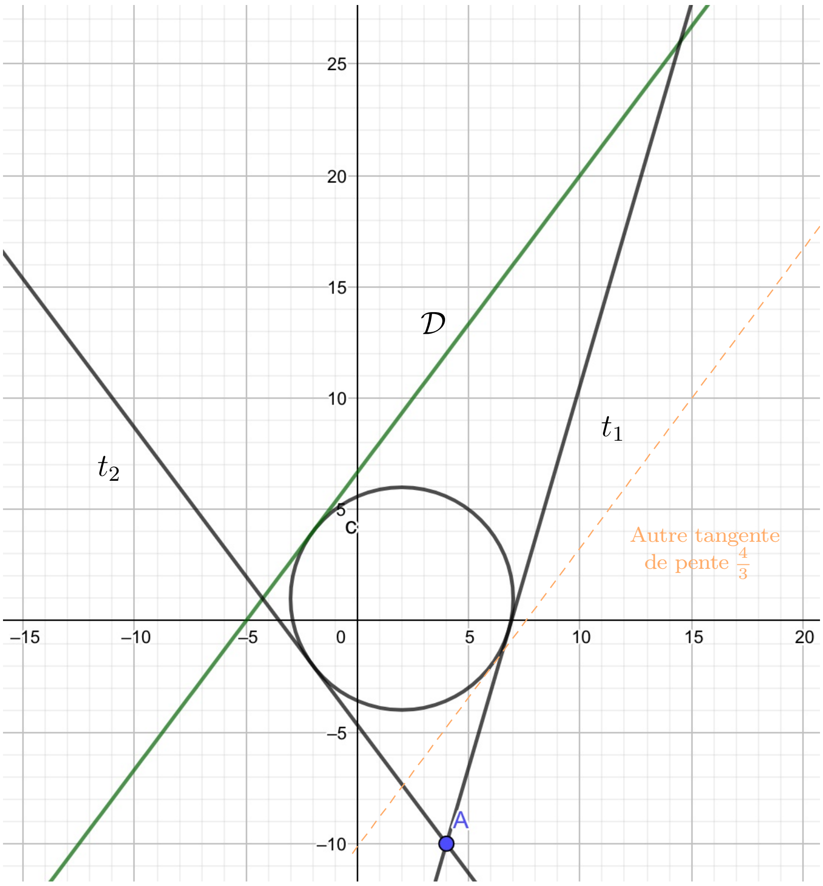
$\Rightarrow 1+\frac{3}{5}h=\pm 5 \Rightarrow h=\frac{5}{3}(-1\pm 5)$ pour former le triangle : $h=\frac{5}{3}\times 4$

L'équation de D est donc : $\boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}}$

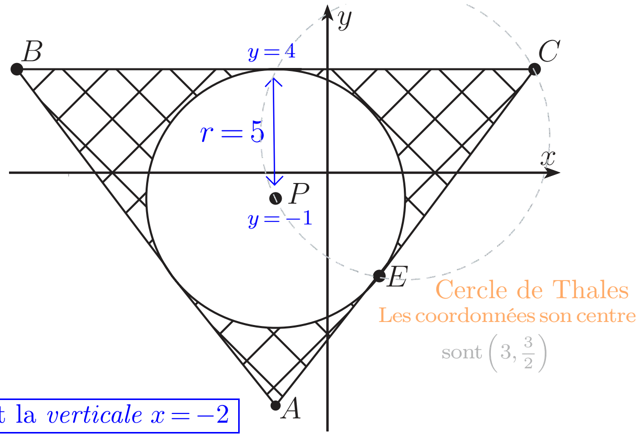
La figure de la page suivante résume la situation

Cette figure représente le cercle γ, ses deux tangentes t_1 et t_1 passant par A.

ainsi que la droite D de pentre $\frac{4}{3}$ également tangente à γ.



Question 4 (matu Hivert 2023) **[15 points]**



Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $C(8\,;4)$ et $P(-2\,;-1)$. On considère le triangle ABC isocèle en A, dont la base BC est parallèle à l'axe Ox, et dont P est le centre du cercle inscrit.
Une esquisse de la situation se trouve sur la droite de votre donnée.

a) Donner l'équation du cercle c inscrit dans le triangle ABC. $\boxed{(x+2)^2+(y+1)^2=5^2}$

b) Déterminer l'équation de la bissectrice intérieure issue du sommet A. $\boxed{\text{c'est simplement la } verticale\ x=-2}$

c) Montrer que la droite $d : 4x - 3y - 20 = 0$ passe par C et est tangente au cercle inscrit c.

d) Déterminer les coordonnées des points A, B et E, E étant le point de contact entre la droite d et le cercle c. Par symétrie on trouve $\boxed{\text{B:}(-12,4)}$.

e) Calculer l'aire hachurée sur la figure ci-dessus.

f) Calculer les angles du triangle ABC.

E est l'intersection du cercle c avec le cercle de Thales diamètre PC et d'équation $(x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$

Recherche des coordonnées de E : $x^2+y^2+4x+2y-20=0$

$$x^2+y^2-6x-3y-20=0$$

$$— \quad 10x+5y \quad =0 \quad \Rightarrow y=-2x$$

$$\text{donc } (x+2)^2+(-2x+1)^2=25 \Rightarrow x=\pm 2 \qquad \boxed{\text{E:}(2;-4)}$$

Recherche des coordonnées de A:

A est sur droite CA d'équation $y=\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}$ et sur la verticale $x=-2$

donc $\boxed{A\text{: }\left(-2,-\frac{28}{3}\right)}$

e) L'aire hachuré = aire du triangle − aire du cercle

$$\mathcal{A}=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}-\pi r^2- \; = \frac{20\times\left(4+\frac{28}{3}\right)}{2}-25\pi=\frac{400}{3}-25\pi\cong\boxed{54.79}$$

$f)$ L'angle $\hat{B}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

$$\hat{B}=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-\frac{40}{3}\end{pmatrix}}{20\sqrt{\frac{2500}{9}}}\right)=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)=\boxed{53.13^0},$$

$\boxed{\hat{\mathrm{C}}=\hat{B}}$ et $\hat{A}=180-\hat{B}-\hat{C}=\boxed{73.74^0}$

Question 5 **[6 points]**

Dans le système d'axes orthonormé $Oxyz$ proposé ci-dessous, on considère les points $A(2;1;4)$, $B(2;0;6)$, $C(4;3;2)$ et $D(4;\frac{3}{2};5)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan α dont on demande une équation.

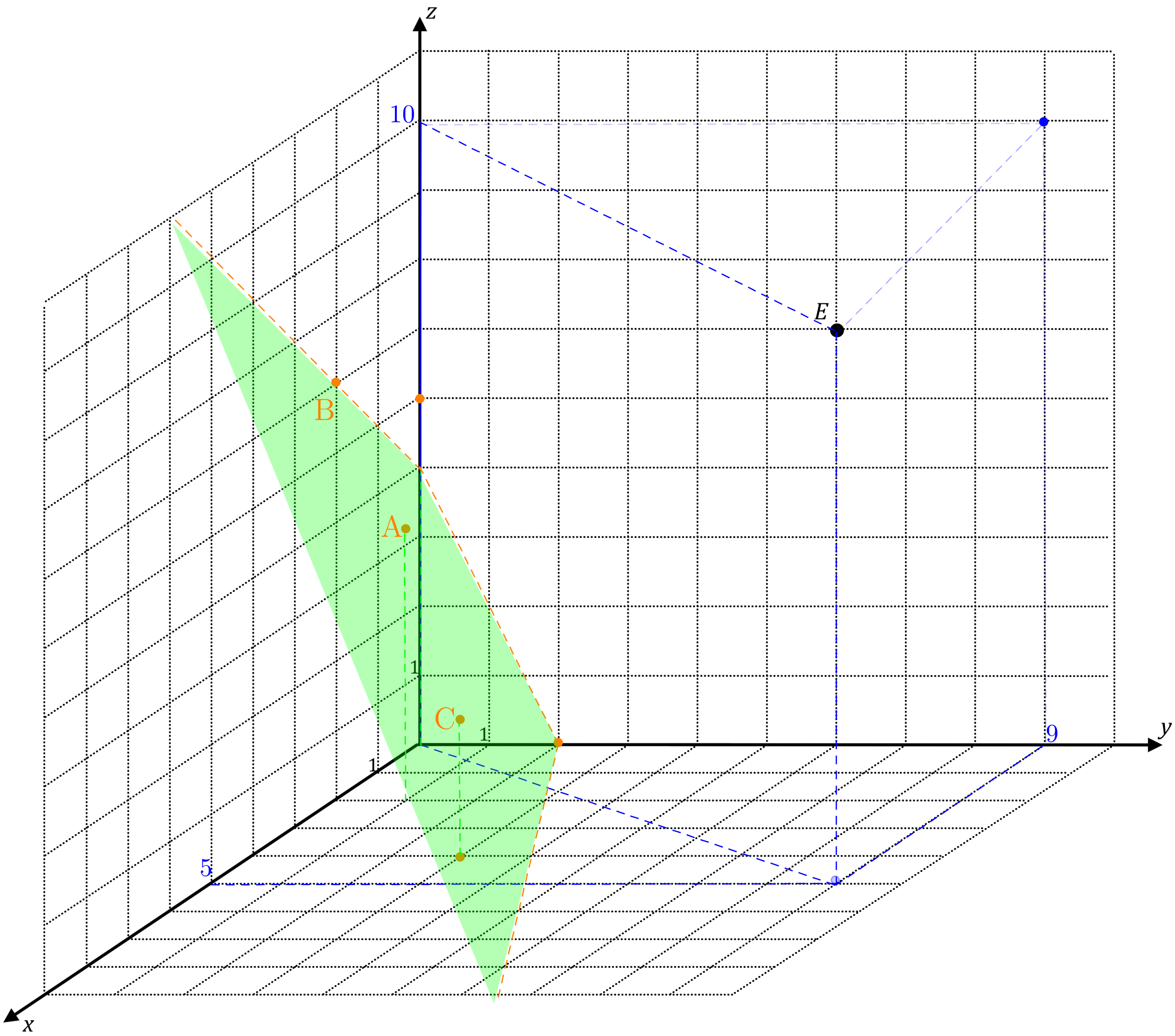
b) À partir de la figure, déterminer l'abscisse du point $E(\ldots;9;8)$.

$\boxed{E\colon (5;9;10)}$

Aide pour (b) : Ne chercher pas la réponses par un calcul !

La réponse est indépendante de (a)

Souvenez-vous que seule la *troisième* coordonnée n'est pas 'déformée' par la perspective…



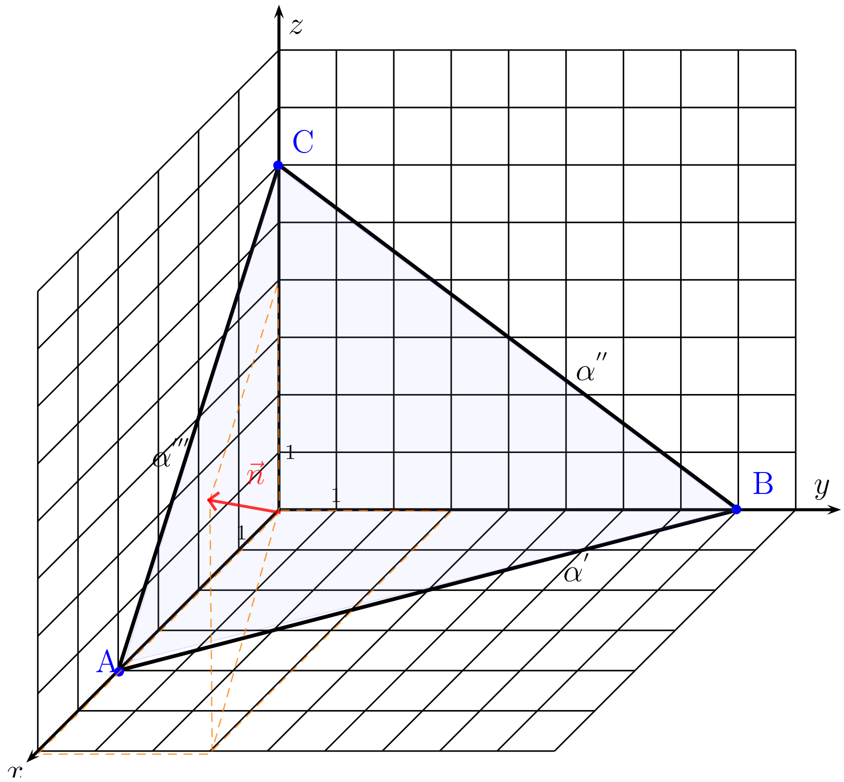
Equation de α: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{traces :}\begin{cases} x=0 \Rightarrow \lambda_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=-\lambda_1-1 \\ z=2\lambda_1+6 \end{cases} \Rightarrow z=-2y+4 \\ y=0 \Rightarrow \lambda_1=1+2\lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\lambda_2 \\ z=4+2(1+2\lambda_2)-2\lambda_2=2\lambda_2+6 \end{cases} \Rightarrow z=(x-2)+6=x+4 \\ z=0 \Rightarrow \lambda_1=-2+1\lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\lambda_2 \\ y=1-(-2+\lambda_2)+2\lambda_2=\lambda_2+3 \end{cases} \Rightarrow x=2+2(y-3)=2y-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$$

(remarque : Les équations des traces n'étaient pas demandées dans l'examen)

Question 6 (basé en partie sur matu Q5 hiver 2021) **[10 points]**

On a dessiné le plan α (passant par A,B,C, avec ses *traces*) dans le repère ci-dessous.



1) Le plan Π par A,B,C peut être décrit par l'équation $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2$, parce-que tout point de ce plan peut être atteint depuis A, en se déplaçant dans la direction de $\vec{v}_1=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ [3]

Une équation *vectorielle* pour le plan α. est donc $\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}}$

2) La *trace* α' se trouve dans le plan (x, y). Elle peut donc être exprimée par une une simple équation cartésienne de la forme $y = ax + b$.

avec $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A} = \frac{8-0}{0-4} = -2$

$y = -\frac{4}{3}x + b.$ passe par B: $(0;8)$ donc $b = 8$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -2x + 8}$

Pour que P(2021;a;b) appartienne à la trace α', il faut que z soit nul, donc $b = 0$ et que $a = -2 \times 2012 + 8$ donc $\boxed{\text{P: } (2021; -4016; 0)}$

3) Le point B(1 ; 2 ; 4) n'est *pas* un point de α car on ne peut *pas* trouver λ_1 et λ_2

tels que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ [1]

4) Une équation *cartésienne* de ce même plan s'obtient à partir de

$\begin{cases} x = 4 - 4\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ y = 0 + 8\lambda_1 \\ z = 0 + 6\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow x = 4 - 4\frac{y}{8} - 4\frac{z}{6} \Rightarrow 6x = 24 - y - 8z \Rightarrow \boxed{6x + 3y + 4z - 24 = 0}$

Un vecteur *normal* au plan α est donc $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$ [1]

5) $\mathcal{D}$: $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \lambda\vec{n} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ -4016 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$ [2]

6) Si oui, alors $\begin{pmatrix} 2075 \\ -4007 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ -4016 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2075 - 2021}{6}}_{=9} = \underbrace{\frac{-4007 + 4016}{3}}_{=3} = \underbrace{\frac{36}{4}}_{=9} \Rightarrow \boxed{\text{non}}$ [1]