MATHS 11

Examen de Juin

6 Questions. Total : /73

Jeudi 20 Juin 2024

Durée : 3 heures

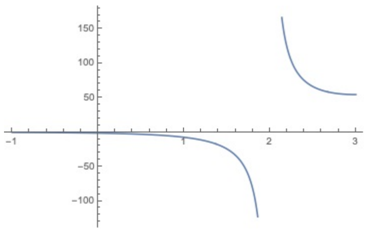
Nom :

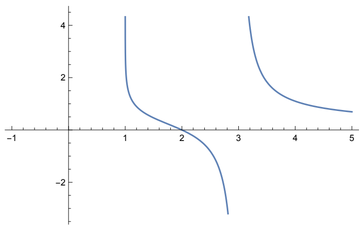
Question 1 **[3 points]**

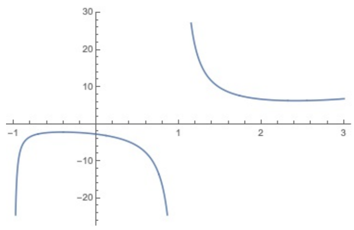
On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

1) Déterminer le *domaine* de f. [2]

2) Laquelle des trois figures ci-dessous représente la courbe d'équation $y = f(x)$? [1]







Question 2 **[26 points]**

Considérons la fonction $g(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{2(x^2 - 1)}$

1) Déterminer le *domaine* de g. [2]

2) Determiner les intersections de la courbe de g avec les deux axes du repère orthonormé $(0, x, y)$ [2]

3) Monter que la courbe de cette fonction admet une *asymptote verticale* et un *trou*.

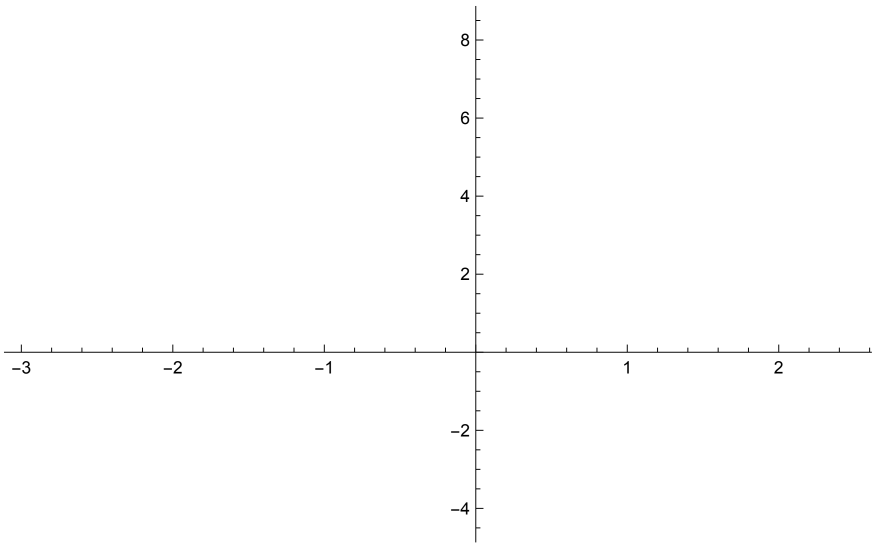
Donner l'équation de l'asympotote verticale et les coordonnées du trou. [4]

4) Expliquer pourquoi cette courbe admet aussi une *asymptote horizontale*.

Donner l'équation de l'asympotote horizontale. [3]

5) A l'aide d'un tableau de signe, déterminer comment la courbe s'approche de ses asymptotes. [4]

6) Représentez la courbe dans repére orthonormé ci-dessous, avec les intersections, le trou et ses asymptotes. [3]



7) Soit A le point sur la courbe de g, d'abscisse $x_A = -2$

et B le point sur la courbe de g, d'abscisse $x_B = 0$.

Quelle est la *pente* de la droite AB ? [3]

8) La droite AB passe-t-elle par l'intersection des deux asymptotes ?

Argumenter votre réponse par un calcul. [3]

9) On définit la fonction $h(x) = \log_3(g(x))$. Quel est le *domaine* de $h(x)$? [2]

Question 3 (matu 2021) **[13 points]**

On considère le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 4x = 2y + 20$ et le point $A(4\,;-10)$.

a) Montrer que le centre de γ est $C(2\,;1)$ et que son rayon vaut $r = 5$.

b) Vérifier par un calcul que le point A est extérieur au cercle.

c) Montrer que la droite $t_1 : 24x - 7y - 166 = 0$ est une tangente au cercle γ passant par le point A.

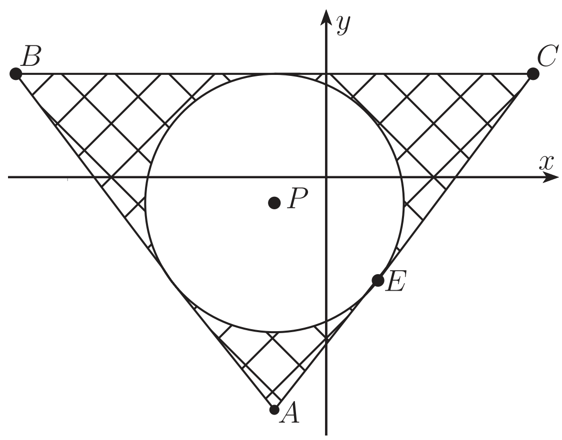
d) On donne t_2, l'autre tangente à γ passant par le point A. Son équation est

$$t_2 : \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = -10 + 4\lambda \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculer les coordonnées de son point de contact T avec le cercle γ.

e) Donner l'équation de la droite d de pente $\frac{4}{3}$ telle que γ soit le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites t_1, t_2 et d.

Question 4 (matu Hivert 2023) **[15 points]**



Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $C(8\,;4)$ et $P(-2\,;-1)$. On considère le triangle ABC isocèle en A, dont la base BC est parallèle à l'axe Ox, et dont P est le centre du cercle inscrit.
Une esquisse de la situation se trouve sur la droite de votre donnée.

a) Donner l'équation du cercle c inscrit dans le triangle ABC.

b) Déterminer l'équation de la bissectrice intérieure issue du sommet A.

c) Montrer que la droite $d : 4x - 3y - 20 = 0$ passe par C et est tangente au cercle inscrit c.

d) Déterminer les coordonnées des points A, B et E, E étant le point de contact entre la droite d et le cercle c.

e) Calculer l'aire hachurée sur la figure ci-dessus.

f) Calculer les angles du triangle ABC.

Question 5

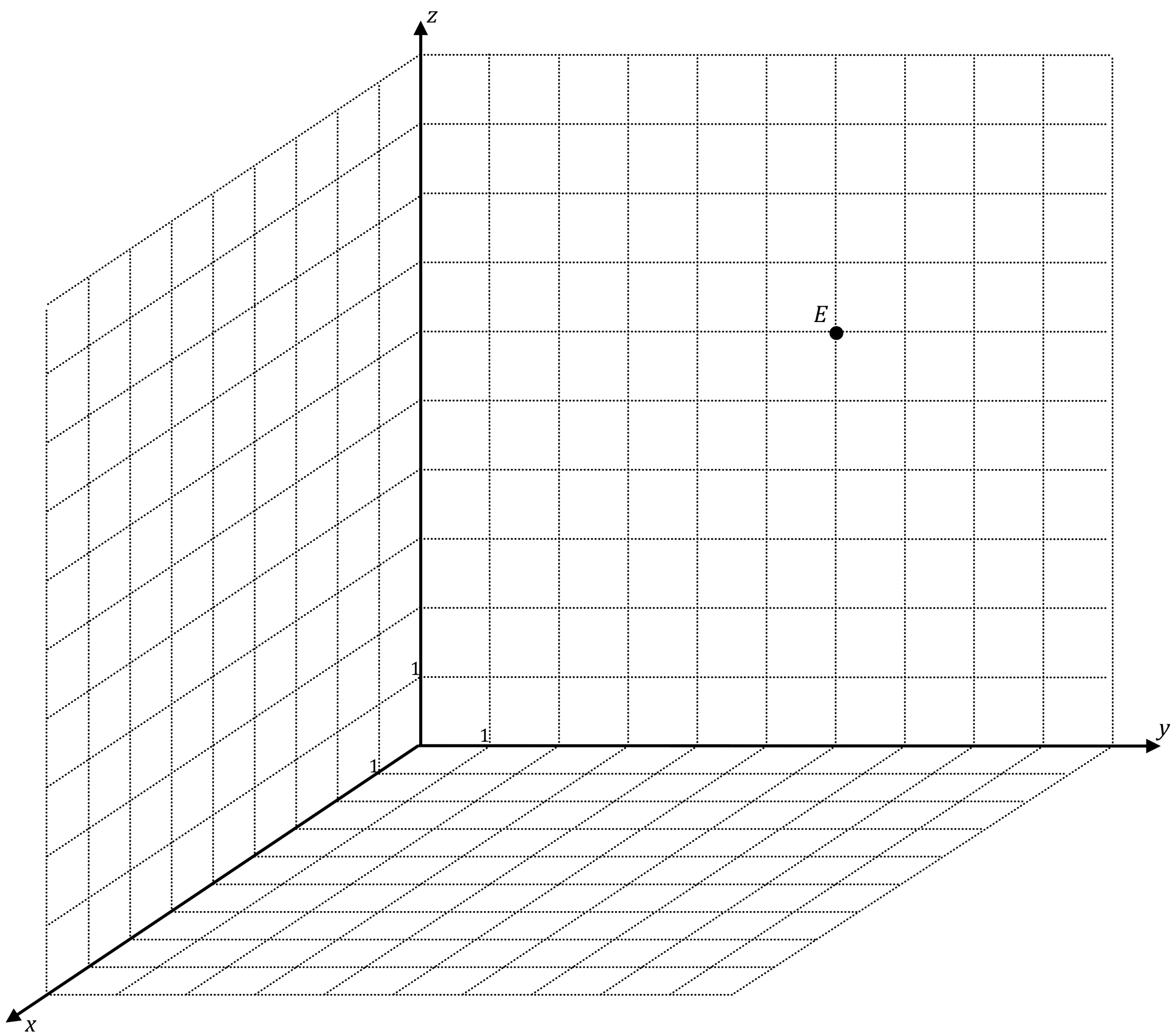
[6 points]

Dans le système d'axes orthonormé $Oxyz$ proposé ci-dessous, on considère les points $A(2;1;4)$, $B(2;0;6)$, $C(4;3;2)$ et $D(4;\frac{3}{2};5)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan α dont on de mande une équation.

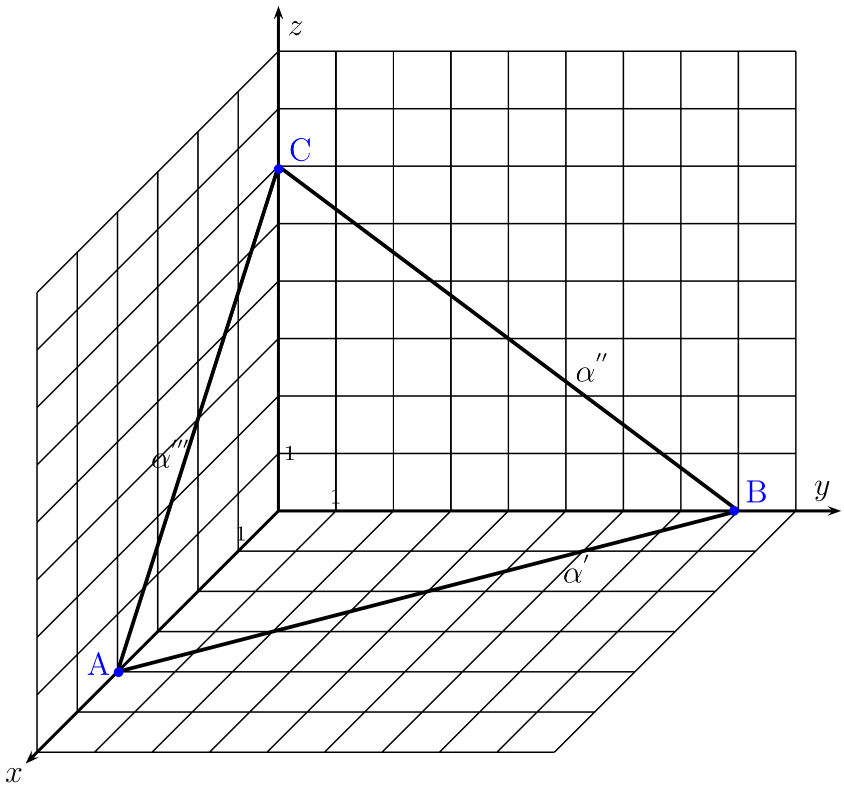
b) À partir de la figure, déterminer l'abscisse du point $E(\ldots;9;8)$.

Aide pour (b) : Ne chercher pas la réponses par un calcul !
La réponse est indépendante de (a)
Souvenez-vous que seule la troisième coordonnée n'est pas 'déformée' par la perspective…



Question 6 (basé en partie sur matu Q5 hiver 2021) **[10 points]**

On a dessiné le plan α (passant par A,B,C, avec ses *traces*) dans le repère ci-dessous.



1) Donner une représentation (équation) paramétrique du plan α. [3]

(Suggestion : Commencer par écrire les coordonnées des points A,B,C.
En principe vous êtres capable de trouver l'équation d'un plan par 3 points donnés !)

2) Trouver a et b afin que le point P(2021;a;b) soit un point de la *trace* α′. [2]

(Aide : la *trace* α' est la partie du plan α telle que $z = 0$)

3) Montrer que le point B(1 ; 2 ; 4) n'est *pas* un point de α. [1]

4) Montrer que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est *normal* au plan α. [1]

5) Proposer une *équation vectorielle* de la droite $\mathcal{D}$ qui est la *perpendiculaire* à α passant par P. [2]

6) Le point Q: $(2075; -4007; 36)$ appartient-il à $\mathcal{D}$? [1]