MATHS 11

Examen de Juin

7 Questions. Total : $\boxed{\quad /70}$

Jeudi 22 Juin 2023

Durée : 3 heures

Nom : ____________

Question 1 **[6 points]**

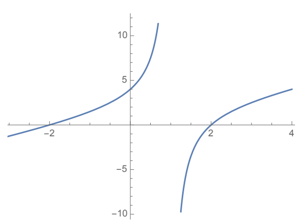
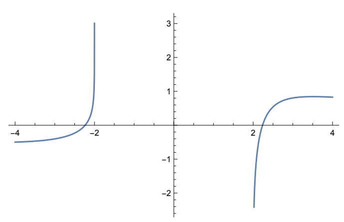
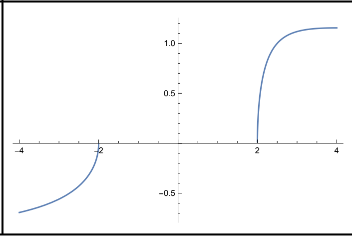
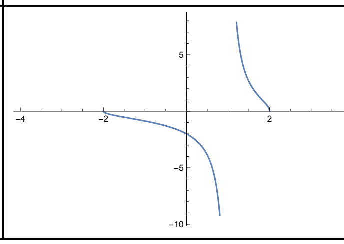
On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{\ln(x^2-4)}{(x-1)}$ (avec $\ln(x)=\log_e(x)$)

1) Le *domaine* de f est : $D_f=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

2) $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\frac{-\infty}{-3}=\infty$ et $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{-\infty}{1}=-\infty$.

3) On en déduit que la figures qui représente la courbe d'équation $y=f(x)$ est B

En effet c'est la seule qui correspond à la fois au domaine et aux deux limites ci-dessus.

A	B	C	D
			

Question 2 **[6 points]**

On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{9x^2-4}{3x-2}$

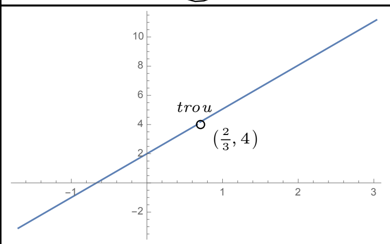
1) Le *domaine* de g est : $D_g=\mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\}$

2) Comme $1\in_g$ on a $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=\frac{9-4}{3-2}=\boxed{5}$,mais $\frac{2}{3}\notin D_g$ donc $\lim_{x\to\frac{2}{3}} g(x)\neq g(\frac{2}{3})$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} g(x)=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4)}{3x-2}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x-2}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}(3x+2)=3\frac{2}{3}+2=\boxed{4}$$

3) On en déduit que la figures qui représente la courbe d'équation $y=g(x)$ est B

car on a montré $g(x)=3x+2$ sauf en $x=\frac{2}{3}$, $\Rightarrow$ droite avec un *trou* en $\left(\frac{2}{3},4\right)$

A	B	C	D
			

Question 3 **[16 points]**

$f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 24\,x - 6 \qquad x_A = 1 \qquad x_B = 6 \qquad x_c = 5$

1) $y_B = f(x_b) = 30$. Le point B est représenté sur la figure ci-dessous.

2) La droite sécante $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$ est tracée sur la figure.

3) L'équation de $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$ est : $y = \frac{30-10}{6-1}(x-1) + 10$ donc $\boxed{y = 4x + 6}$

4) La *dérivée* de $f(x)$ est $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 18x + 24}$

5) Les deux cordonnées de C sont $(x_c, f(x_c))$ c'est à dire $\boxed{\text{C: } (5;14)}$.

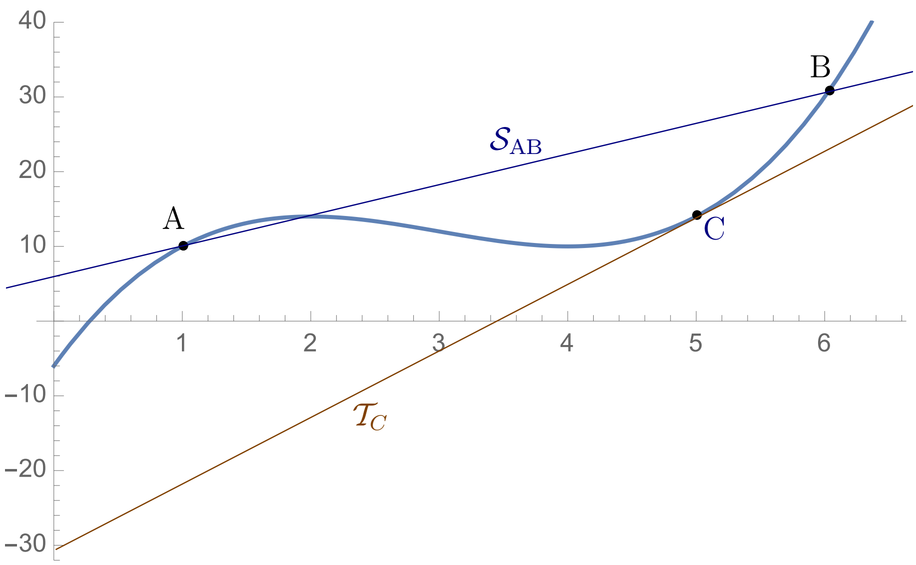
6) Le point C est ajouté sur la la figure ci-dessous.

7) $\mathcal{T}_c$ la *tangente* à la courbe en C est montrée sur la figure.

8) On voit que la pente de $\mathcal{T}_c$ est *positive*, et *supérieure* à celle de $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$.

9) L'équation de la tangente $\mathcal{T}_c$. est $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ donc $\boxed{y = 9x - 31}$

10) L'*équation* qui permettrait de trouver les coordonnées du point d'intersection I= $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}} \cap \mathcal{T}_c$.
est : $\boxed{4x + 6 = 9x - 31}$ $\left(\text{et la solution est } x_I = \frac{37}{5}\right)$



Question 4 **[9 points]**

Considérons la fonction $h(x) = \frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1$

1) Le *domaine* de h est : $D_h = \mathbb{R}^+$ car $x > 0$

2) La formule pour la dérivée de x^n est: $\boxed{(x^n)\text{'} = n\,x^{n-1}}$

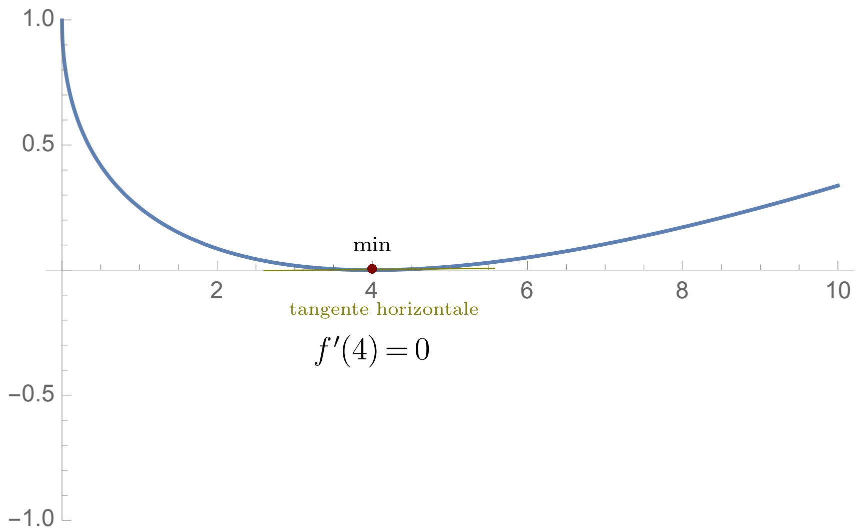
3) En utilisant la formule p.71 tables CRM. $(\lambda f)\text{'} = \lambda f\text{'}$ avec $\lambda = \frac{1}{4}$ on a $\left(\frac{1}{4}x\right)\text{'} = \frac{1}{4}x' = \boxed{\frac{1}{4}}$

4) La *dérivée* de $h(x)$ est : $h'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

5) $\boxed{h'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0}$

6) La figure ci-dessous représente la courbe d'équation $y = h(x)$ pour x entre 0 et 10.

Notre résultat à **(5)** est confirmé par la figure car on a un *minimum* en $x = 4$.



Question 5 (matu 2021) **[14 points]**

a) Le cercle γ: a comme équation: $x^2+y^2-4x=2y+20$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-20=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4-(y-1)^2-1-20=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=25$$

donc $\boxed{\text{le centre est C(2;1)}}$ et le rayon est $\boxed{r=5}$

b) A(4;-10) est à une distance $d=\sqrt{(2^2+11^2)}=\sqrt{125}>r$, donc A est à l'*extérieur*.

c) La droite t_1: $24x-7y-166=0$

- est *tangente* au cercle car elle n'a avec le cercle qu'une intersection.

  En effet la distance à cette droite au centre du cercle

  est $d=\frac{|24\times 2-7\times(1)-166|}{\sqrt{24^2+(-7)^2}}=\frac{|-125|}{25}=r$

- passe par A

  En effet $24\times 4-7\times(-10)-166=0$

d) On donne l'autre tangente par t_2: $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-10+4\lambda \end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

Son point de contact avec le cercle s'obtient par substitution dans l'équation du cercle, ce qui donne : $(4-3\lambda-2)^2+(-10+4\lambda-1)^2=25$

$$\Rightarrow (-3\lambda+2)^2+(4\lambda-11)^2=25$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2-12\lambda+4+16^2-88\lambda+121=25$$

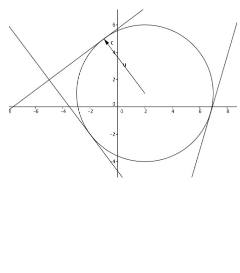
$$\Rightarrow 25\lambda^2-100\lambda+100=0 \qquad \Delta=0 \qquad \lambda=2$$

le point de contact est donc $\boxed{T:(-2,-2)}$

e) Posons t_3: droite d'équation $y=\frac{3}{4}x+b$ avec condition que t_3 soit tangente à γ.

Afin de connaitre b, on doit trouver un point par lequel passe t_3, il s'agit du point de contact T_3 de t_3 avec γ.

Le vecteur $\overrightarrow{CT}_3$ doit être perpendiculaire à t_3, et de norme $r=5$
donc $\overrightarrow{CT}_3=\pm\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en l'occurence $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ T_3:(-1,5)
et donc $5=\frac{3}{4}(-1)+b \Rightarrow b=\frac{23}{4}$ $\boxed{t_3 : y=\frac{3}{4}x+\frac{23}{4} \quad \text{ou} \quad 3x-4y+23=0}$



Question 6 **[9 points]**

$A(2;1;4)\,, B(4;5;8), C(5;13;-5)\, D(3;9;-9)$

a)

Aire ABC $= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|h$ ou $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2+(8-4)^2} = 6$ est la base

donc $45 = \frac{1}{2}6h$ d'où la hauteur vaut $h = \frac{90}{6} = 15$

Par ailleurs on a $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \sqrt{(5-2)^2+(13-1)^2+(-5-4)^2} = \sqrt{234}$

et $\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\| = \sqrt{(5-4)^2+(13-5)^2+(-5-8)^2} = \sqrt{234}$

On en déduit que le triangle ABC est *isocèle*.

b) Les équations paramétriques du plan π contenant ABC sont obtenues par exemple à partir de l'équation vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$,

ce qui donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2+2\lambda_1+3\lambda_2 \\ y = 1+4\lambda_1+12\lambda_2 \\ z = 4+4\lambda_1-9\lambda_2 \end{cases}}$

Si l'on essaye avec les coordonnées de D, pour que D soit dans le plan il faudrait:

$\begin{cases} 3 = 2+2\lambda_1+3\lambda_2 \\ 9 = 1+4\lambda_1+12\lambda_2 \\ -9 = 4+4\lambda_1-9\lambda_2 \end{cases}$ les deux premières équations imposent : $\begin{cases} 2\lambda_1+3\lambda_2 = 1 \\ 4\lambda_1+12\lambda_2 = -8 \end{cases}$

donc $6\lambda_2 = -10$ et $-4\lambda_1 = -12$ ($\lambda_1 = 3\,\text{et}\,\lambda_2 = \frac{5}{3}$)

Mais de 3ème équation il s'en suit que : $-9 = 4+4\times 3-9\times\frac{5}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Non}}$

Les coordonnées d'un point P de π sur l'axe Oy (donc tel que $x=0$ et $z=0$)

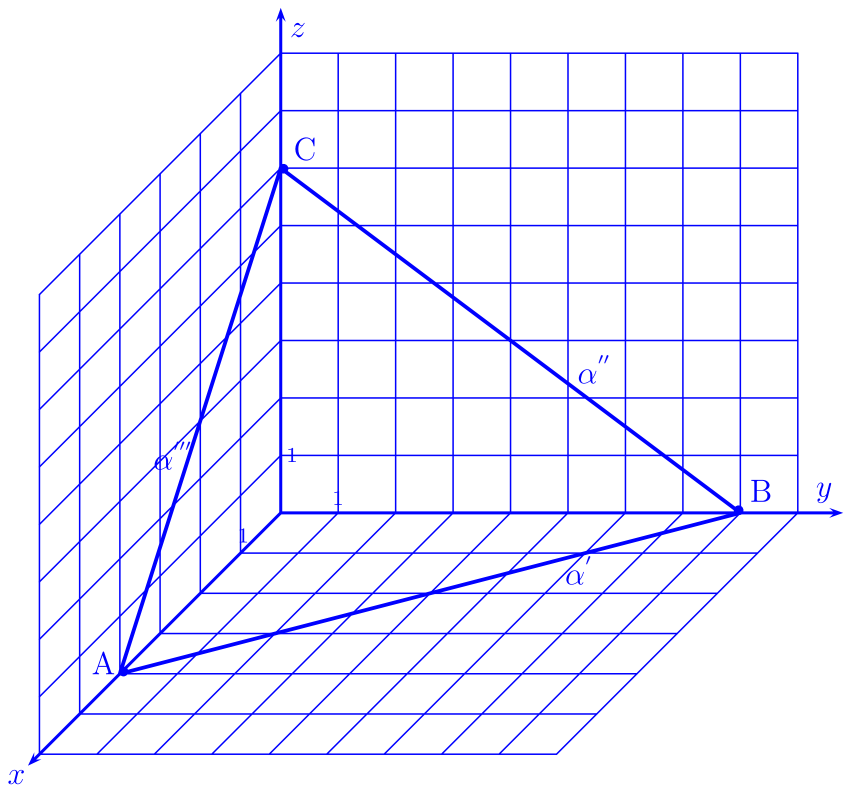
s'obtiennent à partir de $\begin{cases} 2\lambda_1+3\lambda_2 = -2 \\ 4\lambda_1-9\lambda_2 = -4 \end{cases}$ $\lambda_1 = -1\,\text{et}\,\lambda_2 = 0$ donc $\boxed{P\colon(0,-3,0)}$

c) A':(3;3;6) , B':$(\frac{9}{2};9;\frac{3}{2})$, C':$(4;11;-7)$, D':$(\frac{5}{2};5;\frac{-5}{2})$

On remarque que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 6 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ le triangle $A'B'C'D'$ est un *parallélogramme*.

Question 7 (basée en partie sur matu Q5 hiver 2021) **[10 points]**

On a dessiné le plan α dans le repère ci-dessous.



1) Donner une représentation (équation) paramétrique du plan α. [3]

A:(4;0;0), B:(0,8,0) C:(0,0,6) soit M(x,y,z) un point quelconque de α.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Trouver a et b afin que le point P(2021;a;b) soit un point de la trace α′. [2]

(Aide : la *trace* α' est une droite qui correspond à la partie du plan α telle que $z=0$)

$$\begin{pmatrix} 2021 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{donc } \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} 2021 = 4 + 4\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2017}{4} \\ y = 8\lambda_1 = 8\frac{2017}{4} = 4034 \end{array}$$

Donc $\boxed{\text{P:(2021;4034;0)}}$

3) Montrer que le point B(1 ; 2 ; 4) n'est pas un point de α. [1]

supposons que $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1+4\lambda_2=3 & \\ 8\lambda_1 \qquad =2 & \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{4} \\ \qquad 6\lambda_2=4 & \Rightarrow \lambda_2=\frac{2}{3}\end{cases}$

Or $4\frac{1}{4}+4\frac{2}{3}\neq 3$ donc $B\notin\alpha$

4) Montrer que le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$ est *normal* au plan α. [1]

$$\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}=0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}=0 \quad \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \quad \text{et } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \quad \text{donc } \vec{n}\perp\alpha$$

5) Proposer une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}$

perpendiculaire à α passant par P. [2]

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{n} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2021\\4034\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$$

6) Le point Q: $(2075; -4007; 36)$ appartient-il à $\mathcal{D}$? [1]

si oui, alors $\begin{pmatrix}2075\\-4007\\36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2021\\4034\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$,impose que $\lambda=\frac{45}{6}=\frac{-8061}{3}=\frac{36}{4}$

ce qui est absurde $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Non.}}$