MATHS 11

Examen de Juin

7 Questions. Total : /70

Jeudi 22 Juin 2023

Durée : 3 heures

Nom : ______________

Question 1 **[6 points]**

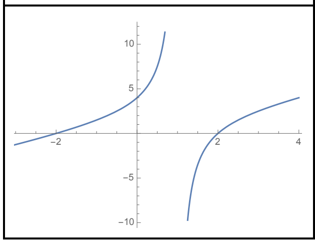
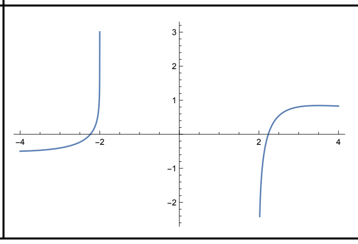
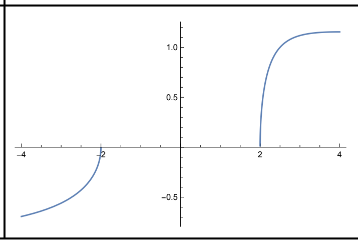
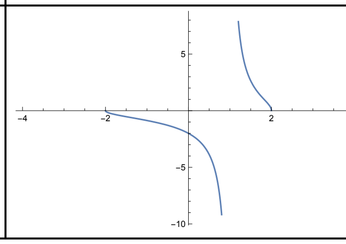
On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{\ln(x^2-4)}{(x-1)}$ (avec $\ln(x)=\log_e(x)$)

1) Déterminer le *domaine* de f. [2]

2) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$? En déduire $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. [2]

3) En déduire laquelle des figures ci-dessous représente la courbe d'équation $y=f(x)$

(justifier votre réponse) [2]

A	B	C	D
			

Question 2 **[6 points]**

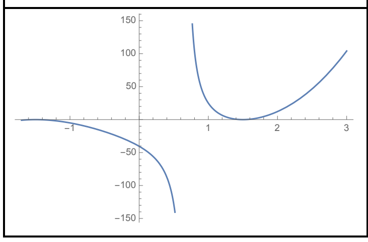
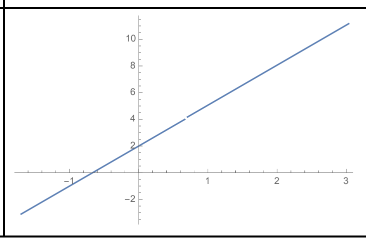
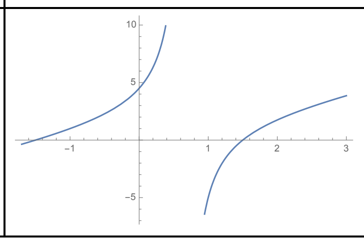
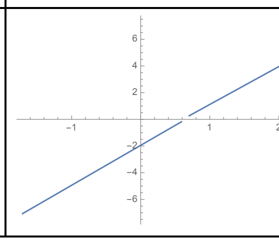
On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{9x^2-4)}{3x-2}$

1) Déterminer le *domaine* de g. [2]

2) Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} g(x)$. rappel : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ [2]

3) En déduire laquelle des figures ci-dessous représente la courbe d'équation $y=g(x)$

(justifier votre réponse) [2]

A	B	C	D
			

Question 3 **[16 points]**

La figure ci-dessous représente une partie de la courbe de la fonction

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 6$

Les points A et B et C sont sur la courbe, avec $x_A = 1$ $x_B = 6$ $x_c = 5$

1) Montrer que $y_B = 30$ et placer le point B sur la figure [1]

2) Tracer soigneusement la droite sécante $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$ qui coupe la courbe en A et B. [2]

3) Trouver l'équation de $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$. [3]

4) Trouver la *dérivée* de $f(x)$ [3]

5) Donner les deux coordonées de C [1]

6) Ajouter le point C sur la la figure ci-dessous. [1]

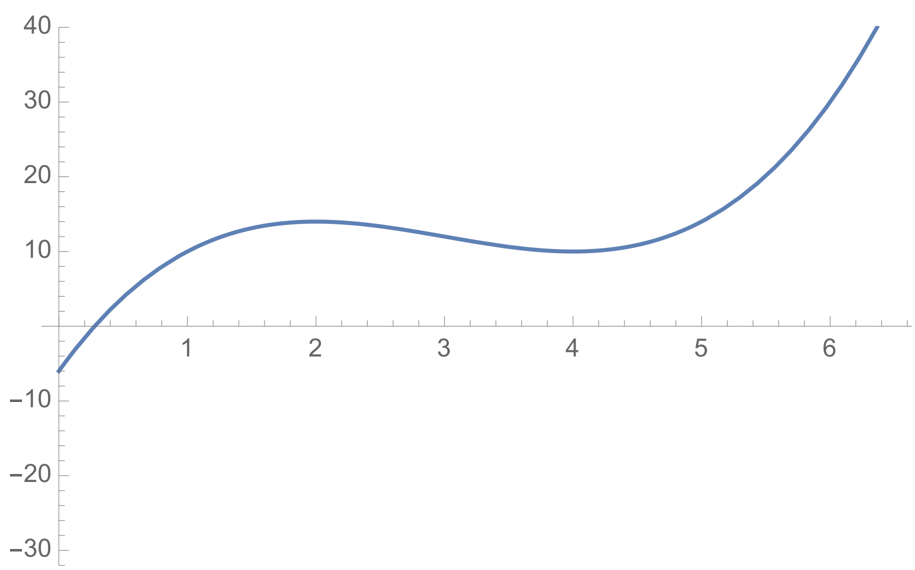
7) Soit $\mathcal{T}_c$ la *tangente* à la courbe en C.
Tracer $\mathcal{T}_c$ sur la figure. [1]

8) A partir de votre dessin, la pente de $\mathcal{T}_c$
i) est-elle *positive* ou *négative* ? [1]
ii) est-elle *inférieure* ou *supérieure* à la pente de $\mathcal{S}_{\mathrm{AB}}$?

9) Trouver l'équation de la tangente $\mathcal{T}_c$. * [3]

10) *Sans la résoudre*, écrivez l'*équation* qui permettrait de trouver les coordonnées du point d'intersection I$= \mathcal{S}_{\mathrm{AB}} \cap \mathcal{T}_c$. [1]

$\star$ Aide pour 9 : Il est facile de connaitre l'équation d'une droite si l'on connait sa pente et les coordonnées de l'un de ses points.



Question 4 **[9 points]**

Considérons la fonction $h(x) = \frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1$

1) Déterminer le *domaine* de h. [2]

2) Rappeler la formule pour la dérivée de x^n [1]

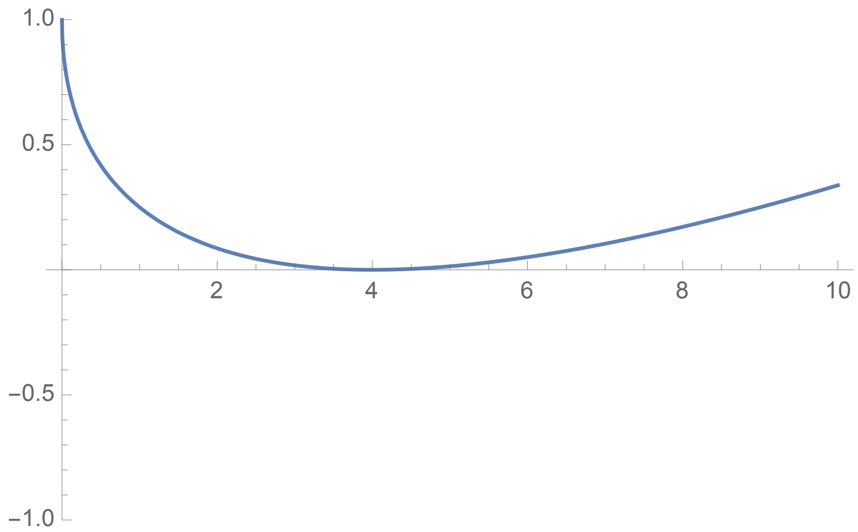
3) Calculer la dérivée de $\frac{1}{4}x$ en utilisant la formule pour (λf)' p.71 tables CRM.

4) Calculer la *dérivée* de $h(x)$ [3]

5) Calculer $h'(4)$ [2]

6) La figure ci-dessous représente la courbe d'équation $y = h(x)$ pour x entre 0 et 10.

Votre résultat à **(3)** est-il confirmé par cette figure ? (justifier) [1]



Question 5 (matu 2021) **[14 points]**

On considère le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 4x = 2y + 20$ et le point $A(4\,;-10)$.

a) Montrer que le centre de γ est $C(2\,;1)$ et que son rayon vaut $r = 5$.

b) Vérifier par un calcul que le point A est extérieur au cercle.

c) Montrer que la droite $t_1 : 24x - 7y - 166 = 0$ est une tangente au cercle γ passant par le point A.

d) On donne t_2, l'autre tangente à γ passant par le point A. Son équation est

$$t_2 : \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = -10 + 4\lambda \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculer les coordonnées de son point de contact T avec le cercle γ.

e) Donner l'équation de la droite d de pente $\frac{4}{3}$ telle que γ soit le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites t_1, t_2 et d.

Aide pour (c) : La tengente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon de cercle passant par ce point.

Question 6 **[9 points]**

On donne les points $A(2\,;1\,;4)$, $B(4\,;5\,;8)$, $C(5\,;13\,;-5)$ et $D(3\,;9\,;-9)$.

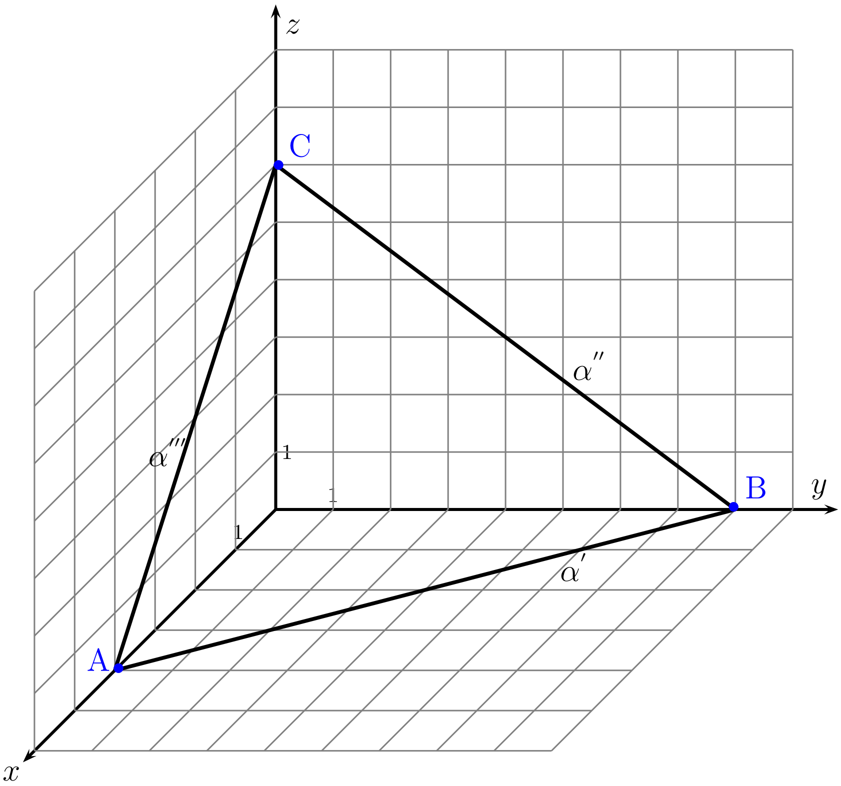
a) L'aire du triangle ABC vaut 45. On nomme h la hauteur du triangle ABC issue de C et c la base du triangle ABC associée à la hauteur h. Que valent les grandeurs h et c ?
Le triangle ABC est-il équilatéral, isocèle, rectangle ou quelconque ? Justifier votre solution.

b) Donner des équations paramétriques du plan π contenant les points A, B et C puis vérifier si D appartient également au plan π.
Donner également les coordonnées d'un point P sur l'axe Oy qui appartient au plan π.

c) On note A' le milieu du segment AB, B' le milieu du segment BC, C' le milieu du segment CD et enfin D' le milieu du segment DA.
Calculer les coordonnées des points A', B', C' et D' puis montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Question 7 (basée en partie sur matu Q5 hiver 2021) **[10 points]**

On a dessiné le plan α dans le repère ci-dessous.



1) Donner une représentation (équation) paramétrique du plan α. [3]

(Suggestion : Commencer par écrire les coordonnées des points A,B,C.
En principe vous devez être capables de trouver l'équation d'un plan par trois points donnés !)

2) Trouver a et b afin que le point P(2021;a;b) soit un point de la trace $\alpha\prime$. [2]

(Aide : la *trace* α' est une droite qui correspond à la partie du plan α telle que $z=0$)

3) Montrer que le point B(1 ; 2 ; 4) n'est pas un point de α. [1]

4) Montrer que le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est *normal* au plan α. [1]

5) Proposer une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}$
perpendiculaire à α passant par P. [2]

6) Le point Q: $(2075; -4007; 36)$ appartient-il à $\mathcal{D}$? [1]