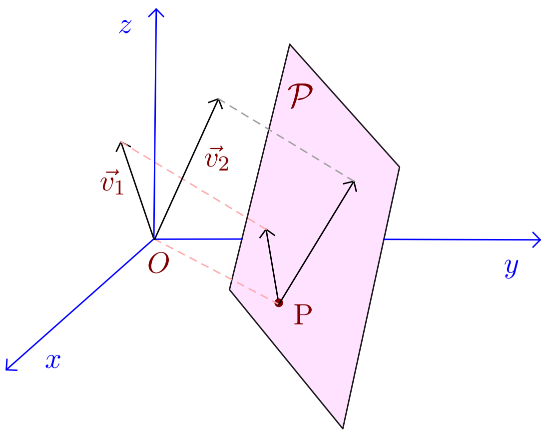
Equation du Plan

Maths 11 N

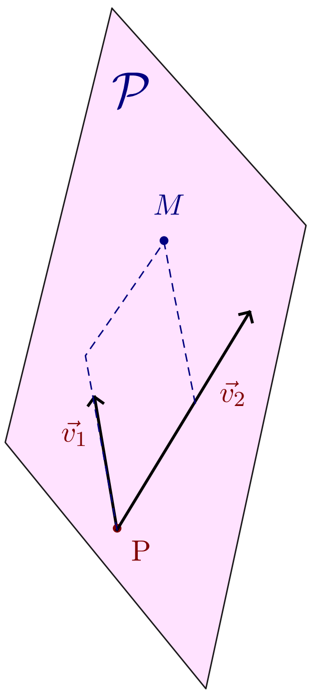
Résumé du cours du lundi 19 janvier

On cherche l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par un point P de coordonnées $(x_p; y_p; z_p)$ et *parallèle* à deux vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.



On peut dire que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M: (x; y; z)$ de l'espace tels que

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}}$ $(\star)$ (λ_1 et λ_2 étant les *paramètres* de l'équation)



Par exemple, sur la figure à gauche, le point M est atteint en prenant

λ_1 proche de ______

et λ_2 proche de ______

La formule $(\star)$ peut se ré-écrire sous forme développée (c'est à dire avec les composantes de vecteurs) ainsi:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z2 \end{pmatrix}}$$

ou sous forme d'un système de 3 équations :

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda_1\ x_1 + \lambda_2\ x_2 \\ y = y_p + \lambda_1\ y_1 + \lambda_2\ y_2 \\ z = z_p + \lambda_1\ z_1 + \lambda_2\ z_2 \end{cases}$$

ou encore sous la forme *cartésienne* $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Exemple : On donne ici le point d'entrée $P\colon(4;6;-3)$

et les deux vecteurs $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$.

$(\star)$ devient $\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=4+\lambda_1\ +4\lambda_2 & (1)\\ y=6+2\lambda_1\ +5\lambda_2 & (2)\\ z=-3+3\lambda_1\ +6\lambda_2 & (3)\end{cases}$

Comme on l'a vu en classe :

En éliminant λ_1 de (1) et (2) on obtient : $2x-y=2+3\lambda_2$

En éliminant encore une fois λ_1, cette fois de (1) et (3) on obtient : $3x-z=15+6\lambda_2$

On a donc un *nouveau* système, de deux équations (avec seulement le paramètre λ_2) :

$$\begin{cases} 2x-y=2+3\lambda_2 & (I)\\ 3x-z=15+6\lambda_2 & (II)\end{cases}$$

En faisant ici la soustraction de $(II)-2\times(I)$ (ce qui élimine λ_2), on obtient

$$x-2y+z=-11$$

L'équation *cartésienne* du plan $\mathcal{P}$ est donc : $\boxed{x-2y+z+11=0}$

Vérification:

Vous pouvez maintenant vérifier facilement que

- le point P est bien un point du plan $\mathcal{P}$ (ce qui est la moindre des choses !)
- le point M de la figure est aussi un point du plan $\mathcal{P}$.