Maths 11 N **Equation des *bissectrices* de deux droites** Mardi 28 Novembre 2023

Considérons deux droites d_1 et d_2 dans le plan $\mathbb{R}^2$
dont les équations cartésiennes implicites (relativement à un repère orthonormé (O, x, y))
sont:

$$(d_1) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$(d_2) : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

On s'intéresse à l'ensemble des points *équidistants* (à égale distance) de d_1 et d_2
(c'est ensemble pourrait être écrit : $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, d_1) = d(P, d_2)\}$).
Cet ensemble de points est constitué de <u>deux droites</u>, nommées *bissectrices*.
Pour trouver les équations de ces deux *bissectrices*, on utilise la formule qui exprime la distance d'un point à une droite. Nous supposons que les coordonnées de P sont (x, y)
Alors, en utilisant la formule vue en classe, la condition $d(P, d_1) = d(P, d_2)$
devient : $\dfrac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$

Exemple :

$(d_1) : 7x + y - 34 = 0$ $a_1 =$ $b_1 =$ $c_1 =$

$(d_2) : x - y + 2 = 0$ $a_2 =$ $b_2 =$ $c_2 =$

$$\frac{\ldots x + \ldots y + \ldots}{\sqrt{\qquad}} = \pm \frac{\ldots x + \ldots y + \ldots}{\sqrt{\qquad}}$$

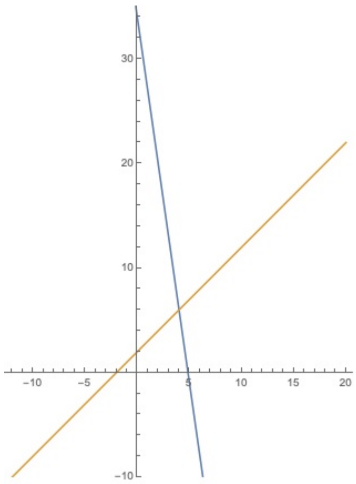
remarque : $\sqrt{50} = 5\sqrt{\quad}$

avec $+$:

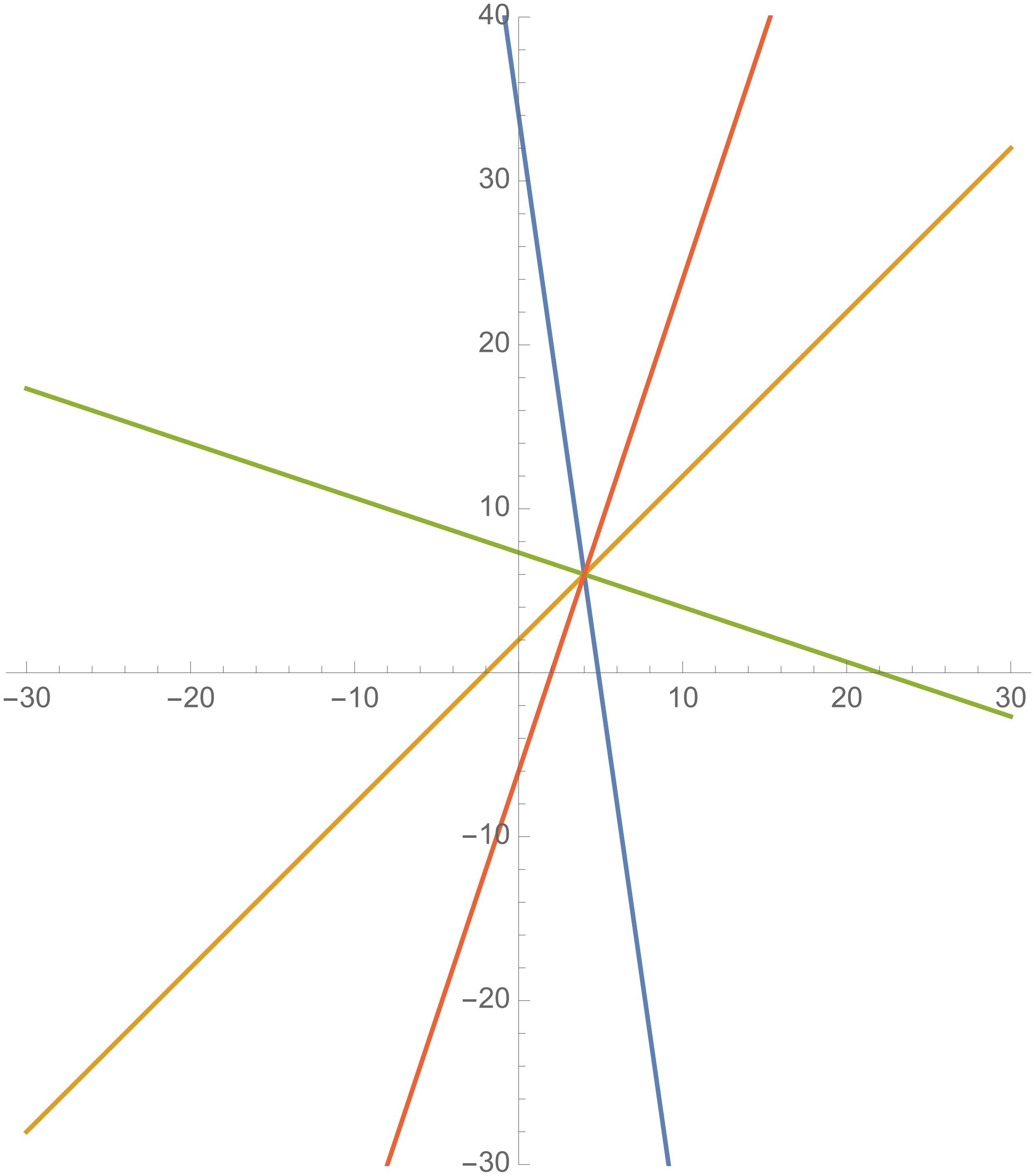
avec $-$:

Pour tracer les droites, on va utiliser leurs équations cartésiennes explicites
à compléter ...

Droite	Equation	Pente	Ordonnée à l'origine
(d_1)	$y = -7x + 34$		
(d_2)	$y = \ x$		
(b_+)	$y = -\frac{1}{3}x$		
(b_-)	$y =$		



1) Identifier les 4 droites



2) Quels est sont les angles entre d_1 et d_2?

3) Formuler une hypothèse sur l'angle entre b_+ et b_- . Pouvez-vous la démontrer ?

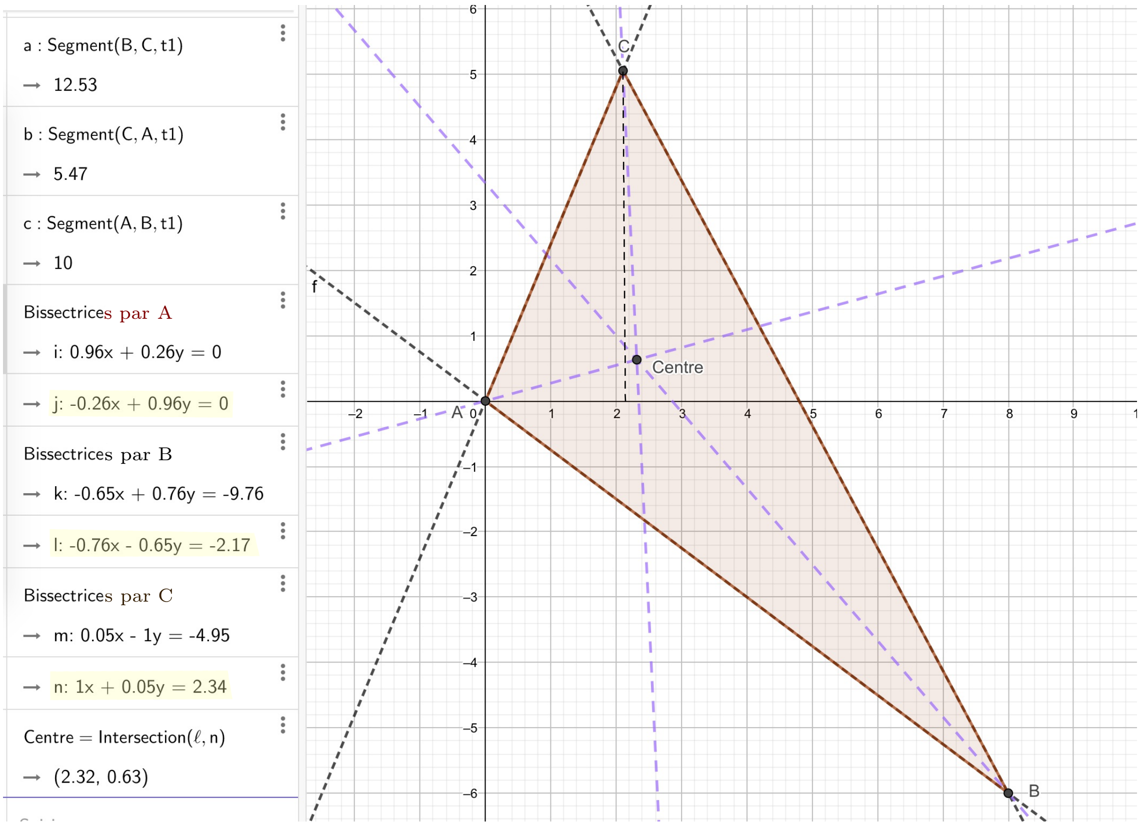
4) Laquelle des 4 droites passe *le plus près* de l'origine ? A quelle distance passe-t-elle ?

Exercice avec *GeoGebra*

L'application open-source *GeoGebra* permet de tracer et d'étudier des figures géométrique.

L'image ci-dessous montre un triangle ABC avec A à l'origine (0,0) et B:(8,-6).

La *pente* de la droite BC vaut $-\frac{15}{8}$ et la *pente* de la droite AC vaut $\frac{12}{5}$.



1) Déterminer l'équation de *droites* AB, BC et AC

2) En déduire les coordonnées de C. Comparez votre résultat avec celui de *GeoGebra*.

3) Montrer que l'angle en A vaut

4) *Geogebra* trouve pour les trois droites les équations cartésiennes implicites données dans le tableau à droite.
Comparer avec vos résultats avant de continuer

$3x + 4y = 0$
$12x - 5y = 0$
$15x + 8y = 72$

5) Déterminer les équations des bissectrices des droites AB et AC

Laquelle de ces deux bissectrice est *interne* au triangle ?

6) Déterminer les équation des bissectrices des droites BA et BC.

Laquelle de ces deux bissectrice est *interne* au triangle ?

7) Comparer vos réponses (5) et (6) avec celles trouvées par *GeoGebra*.

8) Que représente l'intersection des deux bissectrices internes trouvées en (5) et (6) ?

9) Trouver les coordonnées de cet intersection. Comparer votre résultat à celui de *GeoGebra*.

10) Nous verrons prochainement comment trouver l'*équation d'un cercle*.

A l'aide cette équation, quel cercle pourriez-vous décrire ici ?

Réponses

1) Droite AB : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x}$

Droite BC : $y = mx + h$ avec m donné: $m = -\frac{12}{5}$ et h non donné.

donc $y = -\frac{15}{8}x + h$

pour trouver h on considère le fait que la droite BC passe par B:(8,-6)

donc $-6 = -\frac{15}{8}8 + h$ d'où $h = 9$ et donc $\boxed{y = -\frac{15}{8}x + 9}$

Droite AC : $y = mx + h$ avec m donné: $m = \frac{12}{5}$ et h non donné.

donc $y = \frac{12}{5}x + h$

pour trouver h on considère le fait que la droite AC passe par A:(0,0)

donc $0 = -\frac{15}{8}0 + h$ d'où $h = 0$ et donc $\boxed{y = \frac{12}{5}x}$

2) les coordonnées de C sont solutions de $-\frac{15}{8}x + 9 = \frac{12}{5}x$

$$-\frac{75}{40}x - \frac{96}{40}x = -360 \Rightarrow x = \frac{360}{171} = \frac{40}{19} \cong 2.1$$

$$\text{et } y = \frac{12}{5} \cdot \frac{49}{19} = \frac{96}{19} \cong 5.02$$

donc C:$\left(\frac{360}{171}, \frac{96}{19}\right)$

3) L'angle optu en A vaut arcos $\left(\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}}{\sqrt{25}\sqrt{169}}\right)$=arccos$\left(\frac{20-36}{5 \cdot 13}\right)$=$104.25^0$

4) En reprenant les résultats de 1:

#	droite	équation explicite	équation implicite	résultat de *GGebra*	conformité
1	AB	$y = -\frac{3}{4}x$	$3x + 4y = 0$	$3x + 4y = 0$	*oui*
2	BC	$y = -\frac{15}{8}x + 9$	$15x + 8y - 72 = 0$	$15x + 8y = 72$	*oui*
3	AC	$y = \frac{12}{5}x$	$12x - 5y = 0$	$12x + 5y = 0$	*oui*

5) $\frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{12x-5y}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} \Rightarrow 13(3x+4y) = \pm 5(12x-5y) \Rightarrow 39x + 52y = \pm(60x - 25y)$

$$\Rightarrow (39 \mp 60)x = (-52 \mp 25)y$$

6) $\frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{15x+8y-72}{\sqrt{15^2+(8)^2}} \Rightarrow 17(3x+4y) = \pm 5(15x+8y-72) \Rightarrow 51x + 68y = \pm(75x + 40y - 360)$

$$\Rightarrow (51 \mp 75)x = (\pm 40 - 68)y - 360$$

En résumé:

#	bissectices	par	éq. explicite	équation implicite	relativement au triangle ABC
1	de AB et AC	A	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{3}{11}x \\ y = -\frac{11}{3}x \end{cases}$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} -3x + 11y = 0 \\ 99x + 26y = 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} \text{est } \textit{interne} \text{ car pente } \frac{3}{11} > 0 \\ \text{est } \textit{externe} \text{ car pente } -\frac{11}{3} < 0 \end{cases}$
2	de BA et BC	B	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{6}{7}x + \frac{90}{7} \\ y = -\frac{7}{6}x + \frac{10}{3} \end{cases}$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} 7x - 7y + 90 = 0 \\ 7x + 6y - 20 = 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{cases} \text{est } \textit{externe} \text{ car pente } \frac{6}{7} > 0 \\ \text{est } \textit{interne} \text{ car pente } -\frac{7}{6} < 0 \end{cases}$

8) L'intersection des deux bissecrices internes donne le centre du *cercle inscrit*…

9) … qui se trouve en résolvant l'équation

$$\frac{3}{11}x = -\frac{7}{6}x + \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{11} + \frac{7}{6}\right)x = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{18+77}{66}\right)x = \frac{220}{66} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{220}{95} = \frac{44}{19} \cong 2.3158$$

Cela est en bonne accord avec le résultat mon précis proposé par *GeoGebra*.